VEKTORWERTIGE FOURIERHYPERFUNKTIONEN UND EIN SATZ VOM BOCHNER–SCHWARTZ–TYP

Inaugural–Dissertation

zur
Erlangung des Doktorgrades
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
KLAUS JUNKER
aus Düsseldorf

Düsseldorf 1979

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544321_0049

Vektorwertige Fourierhyperfunktionen und ein Satz vom Bochner-Schwartz-Typ

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Düsseldorf

vorgelegt

von

Klaus Junker

aus Düsseldorf

Düsseldorf

1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Reinhold Meise

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Klaus Steffen

Tag der mündlichen Prüfung: 27.11.1979

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

§ 1 Räume vektorwertiger holomorpher bzw. beliebig oft differenzierbarer Funktionen mit Wachstumsbedingungen 4

§ 2 Die Dolbeault-Auflösung der Garbe $\mathcal{O}$ 13

§ 3 Die Garbe R^E 32

§ 4 Der Satz vom Kern für Fourierhyperfunktionen 47

§ 5 Der Satz von Bochner-Schwartz für skalarwertige Fourierhyperfunktionen 58

Zusammenfassung 72

Literaturverzeichnis 74

Einleitung

Die Untersuchung spezieller Faltungsoperatoren auf der Garbe $\mathcal{B}$ der Hyperfunktionen auf $\mathbb{R}^N$ führte Kawai 1970 zu folgender Verallgemeinerung der von Sato in [32] entwickelten Theorie der Hyperfunktionen. Kawai [18] konstruierte eine Garbe $\mathcal{R}$ mit der Eigenschaft, daß jede Hyperfunktion zu einem Schnitt in $\mathcal{R}$ fortgesetzt werden kann und daß der Raum der globalen Schnitte in $\mathcal{R}$ unter der Fouriertransformation invariant ist. Die Konstruktion von $\mathcal{R}$ erhält man in Anlehnung an die Satosche Idee zur Einführung der Hyperfunktionen so: Bezeichnet man mit D_N die Radialkompaktifizierung des $\mathbb{R}^N$, so definiert man auf dem metrischen Raum $D_N \times i\,\mathbb{R}^N$ die Garbe $\mathcal{O}$ der Keime langsam wachsender holomorpher Funktionen. Für jede offene Teilmenge V von $D_N \times i\,\mathbb{R}^N$ sind die Schnitte $f \in \Gamma(V,\mathcal{O})$ dadurch charakterisiert, daß f auf $V \cap \mathbb{C}^N$ holomorph ist sowie für jedes positive ε und für jedes Kompaktum $K \subset V$ $\sup\{|f(z)|e^{-\varepsilon|z|} \mid z \in K \cap \mathbb{C}^N\} < \infty$ gilt. Die Garbe $\mathcal{R}$ erhält man dann als Einschränkung auf D_N der N-ten abgeleiteten Garbe $\mathcal{H}^N_{D_N}(\mathcal{O})$ mit Träger in D_N der Garbe $\mathcal{O}$. Um einige Eigenschaften von $\mathcal{R}$ zu untersuchen, ist daher mit Hilfe der Kohomologietheorie für Garben u. a. nachzuweisen, daß die Prägarbe der N-ten Kohomologiegruppen $\{H^N_U(V,\mathcal{O}),\ \rho_{U,U'}\}_{U \subset D_N}$ offen eine Garbe ist, wobei für $U' \subset U$ offen $\rho_{U,U'}: H^N_U(V,\mathcal{O}) \to H^N_{U'}(V',\mathcal{O})$ die Einschränkungsabbildung bezeichne und V bzw. V' offene Umgebungen von U bzw. U' in $D_N \times i\,\mathbb{R}^N$ mit $U = V \cap D_N$ bzw. $U' = V' \cap D_N$ seien. Dieses Garbendatum ist dann sogar eine welke Garbe. Nach Definition der Wachstumsbedingungen stimmt $\mathcal{O}|_{\mathbb{C}^N}$ mit der Garbe $\mathcal{O}$ der Keime holomorpher Funktionen überein. Daher gilt $\mathcal{R}|_{\mathbb{R}^N} = \mathcal{B}$, so daß wegen der Welkheit von $\mathcal{R}$ jede Hyperfunktion zu einer Fourierhyperfunktion auf D_N fortstzbar ist. Ferner beweist Kawai, daß für jede kompakte Teilmenge K von D_N die Fourierhyperfunktionen mit Träger in K genau die stetigen linearen Funktionale auf dem Raum $\mathcal{Q}(K)$ sind, wobei $f \in \mathcal{Q}(K)$ ein Keim von Funktionen ist, die für eine offene Umgebung V von K in $D_N \times i\,\mathbb{R}^N$ auf $V \cap \mathbb{C}^N$ holomorph sind und dort für ein δ_K schneller als $\exp\circ(-\delta_K|\cdot|)$ fallen. Aus Gelfand;Wilenkin [9] folgt ferner, daß auf $\mathcal{Q}(D_N)$ die Fouriertransformation ein topologischer Isomorphismus ist, so daß per Dualität dasselbe für

den Schnittraum $\Gamma(D_N, \mathcal{R})$ gilt.

Bei den Beweisen benutzt Kawai neben der Kohomologiemaschinerie wesentlich die von Hörmander entwickelte L^2-Technik (vgl. [13]). Mit denselben Methoden gelang es daher Ito und Nagamachi in [16], Fourierhyperfunktionen auf D_N mit Werten in einem separablen Hilbert-Raum zu konstruieren. Eine geringfügige Modifikation dieser Theorie benutzten Mugibayashi und Nagamachi in [27] zu einer axiomatischen Formulierung der Quantenfeldtheorie.

In der vorliegenden Arbeit wird die Garbe $\mathcal{R}^E$ der Fourierhyperfunktionen auf D_N mit Werten in dem Fréchet-Raum E mit Hilfe des eben beschriebenen Sato-Komatsu-Zuganges eingeführt. Während Kawai die Kohomologiegruppen $H^N_U(V, \mathcal{O})$ mit Hilfe einer Auflösung von $\mathcal{O}$ durch durch Garben gewichteter L^2-Funktionen berechnet, ist es zur Behandlung des E-wertigen Falles nötig zu zeigen, daß $\mathcal{O}$ eine Auflösung durch Garben von Keimen langsam wachsender C^∞-Differential-(0,q)-Formen besitzt, wobei $q \in \mathbb{N}_0$ und die Wachstumsbedingungen so gewählt sind, daß alle Koeffizienten dieser Formen zusammen mit allen Ableitungen der eingangs angegebenen Abschätzung genügen müssen. Der Nachweis der Exaktheit dieser Garbensequenz ist komplizierter als im Fall der Dolbeault-Auflösung der Garbe $\mathcal{O}$, da die Punkte in $(D_N \times i\,\mathbb{R}^N) \setminus \mathbb{C}^N$ keine Umgebungsbasis aus Produktmengen besitzen. Die wesentliche Idee steckt in dem Einsatz eines abstrakten Mittag-Leffler-Argumentes, daß die Kontrolle des Wachstumsverhaltens einer L^2-Lösung der Gleichung $\bar{\partial} g = f$ gestattet, wenn f eine langsam wachsende C^∞-Form ist. Da eine kurze topologisch exakte Sequenz nuklearer Fréchet-Räume bei Tensorierung mit E exakt bleibt, erhält man damit eine Auflösung der Garbe $\mathcal{O}^E$ der Keime langsam wachsender, E-wertiger holomorpher Funktionen durch Garben entsprechender E-wertiger C^∞-Formen. Aus den jeweiligen Resultaten im skalarwertigen Fall folgert man dann mit demselben Argument, daß bestimmte Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathcal{O}^E$ verschwinden. Dies liefert schließlich u. a. die Welkheit der Garbe $\mathcal{R}^E := \mathcal{H}^N_{D_N}(\mathcal{O}^E)\,|_{D_N}$. Mit Hilfe einer Künneth-Formel wird dann gezeigt, daß für jede kompakte Teilmenge K von D_N der Raum $\Gamma_K(D_N, \mathcal{R}^E)$ isomorph zu $\mathcal{Q}'_b(K) \hat{\otimes}_\pi E$ ist. Da $\mathcal{Q}'_b(K)$ ein nuklearer Fréchet-Raum ist, gilt $\mathcal{Q}'_b(K) \hat{\otimes}_\pi E \simeq L_b(\mathcal{Q}(K), E)$ topologisch.

Daher ist wie im Fall $E = \mathbb{C}$ die Fouriertransformation $\mathcal{F}$, definiert durch $T \to \mathcal{F}T\colon g \to T(g)$, $g \in \mathcal{D}(D_N)$, ein topologischer Isomorphismus auf $R^E(D_N)$.

Beim Beweis des Schwartzschen Satzes vom Kern im vierten Paragraphen erweist sich die Wahl der Kompaktifizierung in einem gewissen Sinn als nachteilig. Sind $K \subset D_N$ und $L \subset D_M$ kompakt, so enthält der Abschluß von $(K \cap \mathbb{R}^N) \times (L \cap \mathbb{R}^M)$ in D_{N+M} im allgemeinen zuwenig Halbgeraden in radialer Richtung. Daher erhält man das angestrebte Resultat nur für die globalen Schnitte, d.h. es gilt $R(D_{N+M}) \simeq R(D_N) \hat{\otimes}_\pi R(D_M) \simeq R^{R(D_M)}(D_N)$.

Im letzten Abschnitt wird eine Charakterisierung der positv semidefiniten, skalarwertigen Fourierhyperfunktionen durch die Fouriertransformierten gewisser Borel-Maße angegeben. Dieses Resultat stellt ein Analogon zu dem Satz von Bochner [4] dar und beweist zugleich die von Constantinescu und Weingärtner in [5] aufgestellte Vermutung. Im Beweis wird wesentlich benutzt, daß $\mathcal{F}$ ein topologischer Isomorphismus ist.

§ 1 Räume vektorwertiger holomorpher bzw. beliebig oft differenzierbarer Funktionen mit Wachstumsbedingungen

In diesem Abschnitt werden grundlegende Sprechweisen eingeführt und einige Resultate bereitgestellt, die später öfters benötigt werden. Definitionen und Ergebnisse aus der Theorie der lokalkonvexen Vektorräume, die im folgenden nicht explizit aufgeführt oder durch Zitat belegt sind, findet man in Floret;Wloka [6], Köthe [22], Band I oder in Schaefer [33]. Die Theorie der topologischen Tensorprodukte und die der nuklearen Räume sind in Grothendieck [12] sowie in Pietsch [29] ausführlich behandelt. Vorausgesetzt werden ferner einige Begriffe aus der Garben- und Kohomologietheorie. Diese findet man in Kultze [23].

Im folgenden werden zunächst Räume langsam wachsender holomorpher bzw. beliebig oft differenzierbarer Funktionen mit Werten in einem Fréchet-Raum definiert (1.2) und für sie eine Darstellung mittels topologischer Tensorprodukte aus den entsprechenden Räumen skalarwertiger Funktionen gewonnen (1.7). Dazu muß insbesondere gezeigt werden, daß letztere nuklear sind (1.6). Die hier eingeführten Räume erzeugen diejenigen Garben, mit deren Hilfe in den beiden folgenden Paragraphen die Garbe der Fourierhyperfunktionen mit Werten in einem Fréchet-Raum definiert und deren Eigenschaften untersucht werden. Zum Schluß dieses Abschnittes werden Räume von Keimen schnell fallender holomorpher Funktionen behandelt (1.8, 1.11, 1.12 sowie 1.14).

Die in der Einleitung angegebenen Wachstumsbedingungen sind nur dann sinnvoll, wenn die Funktionen, an die sie gestellt werden, auf unbeschränkten Teilmengen von $\mathbb{C}^N$ definiert sind. Um später Garben von Keimen derartiger Funktionen korrekt definieren zu können, wird daher zunächst die Radialkompaktifizierung des $\mathbb{R}^N$ eingeführt. Dieser Raum ist topologisch isomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel des $\mathbb{R}^N$, versehen mit der von $\mathbb{R}^N$ induzierten Metrik. Somit ist $\mathbb{R}^N$ als topologischer Unterraum in seiner Radialkompaktifizierung enthalten.

1.1 Bezeichnungen. 1) Die Radialkompaktifizierung des $\mathbb{R}^N$ werde mit D_N bezeichnet. Ferner sei $Z_N := D_N \times i\,\mathbb{R}^N$.

2) Im folgenden sei stets E ein Fréchet-Raum, dessen Topologie durch das Halbnormensystem $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ beschrieben werde.

1.2 Definition. Sei V eine offene Teilmenge von Z_N.

1) Der Raum der *langsam wachsenden* C^∞*-Funktionen* auf $V \cap \mathbb{C}^N$ mit Werten in E wird definiert durch:

$\hat{\mathcal{E}}(V,E) := \{ f \in \mathcal{E}(V\cap\mathbb{C}^N,E)$ für jedes Kompaktum $K \subset V$, jedes $r > 0$, jedes $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$ und für jede stetige Halbnorm q auf E gilt: $\sup\{q(f^{(\alpha)}(z))\cdot e^{-r|z|} \mid z \in K\cap\mathbb{C}^N\} < \infty\}$.

2) Entsprechend bezeichnet man

$\hat{\mathcal{O}}(V,E) := \{f \in \mathcal{O}(V\cap\mathbb{C}^N,E) \mid$ für jedes Kompaktum $K \subset V$, jedes $r > 0$ und jede stetige Halbnorm q auf E gilt:

$\sup\{ q(f(z))\ e^{-r|z|} \mid z \in K \cap \mathbb{C}^N \} < \infty \}$

als den Raum der *langsam wachsenden holomorphen Funktionen* auf $V \cap \mathbb{C}^N$ mit Werten in E.

1.3 Bemerkungen. 1) Im Falle $E = \mathbb{C}$ benutzt man folgende abkürzende Schreibweisen: $\hat{\mathcal{E}}(V) := \hat{\mathcal{E}}(V,E)$ sowie $\hat{\mathcal{O}}(V) := \hat{\mathcal{O}}(V,E)$.

2) Bezeichnet man die Metrik auf Z_N mit ρ, so erhält man für $V \subset Z_N$ offen und jedes $n \in \mathbb{N}$ z. B. durch

$K_n := \{ z \in V \mid |\mathrm{Im}(z)| \le n$ und $\inf\{\rho(z,w) \mid w \in Z_N \setminus V\} \ge \frac{1}{n} \}$

kompakte Teilmengen von V, so daß $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ V ausschöpft. Daher wird auf $\hat{\mathcal{O}}(V,E)$ bzw $\hat{\mathcal{E}}(V,E)$ durch das Halbnormensystem

$\{ r_{m,n}(f) := \sup\{ q_m(f(z))\cdot e^{-\frac{1}{m}|z|} \mid z \in K_n \cap \mathbb{C}^N \} \mid m,n \in \mathbb{N} \}$ bzw.

$\{ s_{m,n}(f) := \sup\{ q_m(f^{(\alpha)}(z))\cdot e^{-\frac{1}{m}|z|} \mid z \in K_n\cap\mathbb{C}^N,\ |\alpha| \le m-1\} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$

eine lokalkonvexe Topologie definiert.

1.4 Lemma. Sei V eine offene Teilmenge von Z_N.

1) $\hat{\mathcal{O}}(V)$ ist ein topologischer Unterraum von $\hat{\mathcal{E}}(V)$.

2) $\hat{\mathcal{O}}(V,E)$ und $\hat{\mathcal{E}}(V,E)$ sind Fréchet-Räume.

Beweis. 1) Eine kompakte Ausschöpfung von V sei so gewählt, daß $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da $\mathbb{C}^N$ topologisch in Z_N enthal-

ten ist, zeigt man mit Hilfe eines Kompaktheitsargumentes leicht, daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine positive Zahl $\varepsilon < 1$ existiert, so daß für jedes $z \in K_n \cap \mathbb{C}^N$ $\{w \in \mathbb{C}^N \mid 1 \le j \le N: |w_j - z_j| < \varepsilon\} \subset \mathring{K}_{n+1}$ gilt. Die Cauchysche Integralformel liefert daher für $f \in \mathcal{O}(V)$ und jedes $m \in \mathbb{N}_0$:

$$s_{m,n}(f) \le \varepsilon^{-m}(m-1)!\, e^{\frac{\varepsilon}{m}\sqrt{N}} \cdot r_{m,n+1}(f) .$$

Also ist $\mathcal{O}(V)$ in $\mathcal{E}(V)$ enthalten, und die induzierte Topologie ist nicht feiner als die Ausgangstopologie. Da für alle $m,n \in \mathbb{N}$ $r_{m,n} \le s_{m,n}$ gilt, ergibt sich die Behauptung.

2) Nach Definition der Topologien ist nur noch die Vollständigkeit zu zeigen. Es genügt außerdem, den Fall der vektorwertigen C^∞-Funktionen zu betrachten. Sei also $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge in $\mathcal{E}(V,E)$. Da die Inklusion $\mathcal{E}(V,E) \to \mathcal{E}(V \cap \mathbb{C}^N, E)$ stetig ist, konvergiert $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}(V \cap \mathbb{C}^N, E)$ gegen eine C^∞-Funktion f. Da diese Konvergenz insbesondere punktweise erfolgt, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$, zu allen $n,m \in \mathbb{N}$ und zu jedem $z \in K_n \cap \mathbb{C}^N$ ein $l(z) \in \mathbb{N}$ mit $q_m(f^{(\alpha)}(z) - f^{(\alpha)}_{l(z)}(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\alpha| \le m-1$. Ferner existiert aufgrund der Voraussetzung ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $l,j \ge l_0$ $s_{m,n}(f_l - f_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Hieraus folgt, wenn man stets $l(z) \ge l_0$, $z \in K_n \cap \mathbb{C}^N$, wählt, für alle $l \ge l_0$, für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ mit $|\alpha| \le m-1$ sowie für alle $z \in K_n \cap \mathbb{C}^N$:

$$q_m\Big(f^{(\alpha)}(z) - f_l^{(\alpha)}(z)\Big) e^{-\frac{1}{m}|z|} \le \frac{\varepsilon}{2} + \sup\Big\{ q_m\Big(f^{(\alpha)}_{l(z)}(w) - f_l^{(\alpha)}(w)\Big) \mid w \in K_n \cap \mathbb{C}^N \Big\},$$

was für jedes $l \ge l_0$ $s_{m,n}(f - f_l) < \varepsilon$ liefert. Damit gilt $s_{m,n}(f) < \varepsilon + s_{m,n}(f_{l_0})$, d. h. $f \in \mathcal{E}(V,E)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathcal{E}(V,E)$.

Um die Nuklearität von $\mathcal{O}(V)$ und $\mathcal{E}(V)$ zu zeigen, wird zunächst der Raum

$$S := \{ f \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^N) \mid \text{für jedes } m \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \|f\|_m := \sup_{|\alpha| \le m-1} |f^{(\alpha)}(z)| e^{-\frac{1}{m}|z|} < \infty$$

untersucht, wobei S mit der von den Halbnormen $\|\cdot\|_m$, $m \in \mathbb{N}$, erzeugten Topologie versehen wird. Es gilt

1.5 Lemma. S ist nuklear.

Beweis. Mit den Bezeichnungen von Wloka [41] gilt $S = E_M := \operatorname{proj}_{q\to\infty, A} E^{(q)}_{M,A}$, wenn man für $x \in \mathbb{R}^{2N}$ $M(x) := \sum_{j=1}^{2N} |x_j|$ setzt. Nach [41], Satz 3 ist E_M isomorph zum projektiven Limes eines projektiven, Hilbert-Schmidtschen Spektrums von Hilbert-Räumen. Die Nuklearität von S folgt somit aus Pietsch [29], 3.3.6. •

Bemerkung. Einen anderen Beweis für die Nuklearität von S liefert [29], 4.1.5. Denn wie in [29], 6.2.5 kann man zeigen, daß zu jeder Nullumgebung U in S eine Nullumgebung V in S existiert, so daß die kanonische Abbildung $E_V \to E_U$ absolutsummierend ist. Vgl. dazu Junker [17], Kap. III, 1.3.

1.6 Folgerung. Ist V eine offene Teilmenge von Z_N, so sind die Räume $\mathcal{D}(V)$ und $\tilde{\mathcal{E}}(V)$ nuklear.

Beweis. Da sich die Nuklearität auf topologische Unterräume vererbt (Floret;Wloka [6], § 27, 2.1), genügt es nach 1.4 1), die Behauptung für $\tilde{\mathcal{E}}(V)$ zu zeigen.

Dazu sei für eine beliebige, kompakte Teilmenge K von Z_N mit $S(K)$ der lineare Unterraum von S bezeichnet, dessen Elemente Träger in $K \cap \mathbb{C}^N$ haben. $S(K)$, versehen mit der Relativtopologie, ist somit nuklear. Wählt man nun eine kompakte Ausschöpfung $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von V mit $\emptyset \neq \mathring{K}_n \subset K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, so existiert eine Folge $(f_n)_{n\geq 2}$ in $\tilde{\mathcal{E}}(V \cap \mathbb{C}^N)$, die folgende Eigenschaften besitzt:

$f_n = 1$ auf einer in Z_N offenen Umgebung von K_{n-1},

$\operatorname{Tr}(f_n) := \overline{\{z \in \mathbb{C}^N \mid f_n(z) \neq 0\}}^{\mathbb{C}^N} \subset \mathring{K}_n$, sowie

$\sup\{|f_n^{(\alpha)}(z)| \mid z \in \mathbb{C}^N\} < \infty$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$.

Dies gilt z. B. für $f_n := \rho_{\varepsilon_n} * g_n$, wobei g_n eine geeignete stetige Funktion mit $0 \leq g_n \leq 1$, $\operatorname{Tr}(g_n) \subset \mathring{K}_n$ und $g_n = 1$ auf einer Umgebung von K_{n-1} sei. Ferner sei ρ_{ε_n} für ein geeignetes ε_n eine nicht negative Glättungsfunktion mit $\operatorname{Tr}(\rho_{\varepsilon_n}) \subset \{z \in \mathbb{C}^N \mid |z| \leq \varepsilon_n\}$. Aus der Leibniz-Regel folgt daher, daß für alle $n,l \in \mathbb{N}$ mit $n > l \geq 2$ durch $\pi_{l,n}(f) := f_l \cdot f$ stetige Spektralabbildungen

$\pi_{l,n}: S(K_n) \to S(K_l)$ definiert werden. Mit $\pi_{n,n} := id_{S(K_n)}$, $n \geq 2$, gilt somit für alle $n \geq m \geq l \geq 2$ $\pi_{l,n} = \pi_{m,n} \circ \pi_{l,m}$. Mit derselben Begründung zeigt man, daß für alle $n \geq 2$ $\sigma_n: \tilde{\mathcal{E}}(V) \to S(K_n)$, $\sigma_n(f) := f_n \cdot f$, stetig ist und für alle $n \geq l \geq 2$ $\sigma_l = \pi_{l,n} \circ \sigma_n$ gilt. Daher wird eine lineare, stetige Abbildung $\sigma: \tilde{\mathcal{E}}(V) \to \operatorname{proj}_{\leftarrow n} S(K_n)$ mit $\sigma_n = \pi_n \circ \sigma$ induziert. Wegen $f_n = 1$ auf $K_{n-1} \cap \mathbb{C}^N$ ist σ injektiv. Ist $g \in \operatorname{proj}_{\leftarrow n} S(K_n)$, so wird durch $f(z) := \pi_n(g)[z]$, falls $z \in K_{n-1} \cap \mathbb{C}^N$ für ein $n \geq 2$, eine beliebig oft differenzierbare Funktion auf $V \cap \mathbb{C}^N$ definiert. Da die Mengen K_n, $n \in \mathbb{N}$, V kompakt ausschöpfen, gilt dann auch $f \in \tilde{\mathcal{E}}(V)$. Also ist σ bijektiv und nach dem Satz von der offenen Abbildung ein topologischer Isomorphismus (Köthe [22], I § 15, 12(2)). Die Behauptung folgt dann aus Floret;Wloka [6], § 27, 2.2. •

Für lokalkonvexe Räume F und G definiert man das ε-Produkt $F \varepsilon G$ als den Raum $L_e(G_c', F)$ der stetigen linearen Abbildungen von G_c' mit Werten in F, versehen mit Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den gleichstetigen Teilmengen von G_c'. Dabei bedeutet G_c', daß der (topologische) Dualraum von G mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den präkompakten Teilmengen von G zu versehen ist. Ist G quasivollständig, so stimmt diese Definition mit der in Schwartz [36], p. 18 angegebenen überein.
Sind für $i = 1,2$ F_i und G_i quasivollständige lokalkonvexe Räume, $u \in L(F_1, F_2)$ sowie $v \in L(G_1, G_2)$, so ist $u \varepsilon v: F_1 \varepsilon G_1 \to F_2 \varepsilon G_2$, $u \varepsilon v(w) := u \circ w \circ {}^t v$, linear und stetig.

1.7 Satz. Ist $V \subset \mathbb{Z}_N$ offen, so gelten die topologischen Isomorphien:

$$\tilde{\mathcal{E}}(V,E) \simeq \tilde{\mathcal{E}}(V) \hat{\otimes}_\pi E \quad \text{und} \quad \mathcal{D}(V,E) \simeq \mathcal{D}(V) \hat{\otimes}_\pi E .$$

Beweis. Im folgenden wird nur der erste Fall behandelt, da man den Beweis für die vektorwertigen holomorphen Funktionen analog führen kann.
Da $\tilde{\mathcal{E}}(V)$ stetig in $\mathcal{E}(U)$, $U := V \cap \mathbb{C}^N$, eingebettet werden kann und da das ε-Produkt Inklusionen erhält (Schwartz [36], p. 20), folgt unter Beachtung der Nuklearität von $\mathcal{E}(U)$ (Treves [39], p.

530) aus Grothendieck [12], Intr. III,6, Chap. II, § 2, n° 1, Th. 6 sowie § 3, n° 3, Ex. 1 die Stetigkeit der Inklusion

$$\tilde{\mathcal{E}}(V) \varepsilon E \to \mathcal{E}(U) \varepsilon E \simeq \mathcal{E}(U) \hat{\otimes}_\pi E \simeq \mathcal{E}(U,E) \ .$$

Dabei wird die Isomorphie $k: \mathcal{E}(U) \varepsilon E \to \mathcal{E}(U,E)$ durch $k(u) := u \circ \Delta$, $\Delta: U \to \mathcal{E}(U)'_c$ mit $\Delta(z): f \to f(z)$, gegeben. Außerdem gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ $(k(u))^{(\alpha)} = u \circ \Delta^{(\alpha)}$, $\Delta^{(\alpha)}: U \to \mathcal{E}(U)'_c$, $\Delta^{(\alpha)}(z): f \to f^{(\alpha)}(z)$.

Um zu zeigen, daß $k(\tilde{\mathcal{E}}(V) \varepsilon E) \subset \tilde{\mathcal{E}}(V,E)$ gilt, seien $K \subset V$ kompakt, $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ sowie eine stetige Halbnorm q auf E beliebig gewählt. Liegt $f \in \mathcal{E}(V)$ in der Einheitskugel $V_{p,1}$ bez. der Halbnorm $p: g \to \sup\{|g^{(\alpha)}(z)| e^{-r|z|} \mid z \in K \cap \mathbb{C}^N\}$, so gilt für jedes $z \in K \cap \mathbb{C}^N$ mit $\Delta^{(\alpha),r}(w): f \to f^{(\alpha)}(w) \cdot e^{-r|w|}$, $w \in V \cap \mathbb{C}^N$,

$$|f, \Delta^{(\alpha),r}(z)| = |f^{(\alpha)}(z)| e^{-r|z|} \leq 1 \ ,$$

d.h. für alle $z \in K \cap \mathbb{C}^N$ ist $\Delta^{(\alpha),r}(z) \in V^\circ_{p,1}$. Dann gilt aber für jedes $u \in \tilde{\mathcal{E}}(V) \varepsilon E$

$$\sup\{q((k(u))^{(\alpha)}(z)) e^{-r|z|} \mid z \in K \cap \mathbb{C}^N\} = \sup\{q(u \circ \Delta^{(\alpha),r}(z)) \mid z \in K \cap \mathbb{C}^N\} \leq$$

$$\leq \sup\{q(u(y')) \mid y' \in V^\circ_{p,1}\} =: \rho_{p,q}(u) < \infty \ ,$$

da $\rho_{p,q}$ eine stetige Halbnorm auf $\tilde{\mathcal{E}}(V) \varepsilon E$ ist.

Offensichtlich ist $\tilde{\mathcal{E}}(V,E)$ in

$A(U,E) := \{f: U \to E \mid$ für jedes $e' \in E'$ gilt $e' \circ f \in \tilde{\mathcal{E}}(V)\}$

enthalten. Gramsch [10], O.1 zeigt jedoch, daß $k_{|\tilde{\mathcal{E}}(V) \varepsilon E}$ einen algebraischen Isomorphismus $\tilde{\mathcal{E}}(V) \varepsilon E \to A(U,E)$ induziert. Also gilt algebraisch $\tilde{\mathcal{E}}(V) \varepsilon E \simeq \tilde{\mathcal{E}}(V,E)$.

Wegen der Nuklearität von $\check{\mathcal{E}}(V)$ erhält man daher einen algebraischen Isomorphismus $j: \check{\mathcal{E}}(V) \otimes_\pi E \to \check{\mathcal{E}}(V,E)$.

Ist $f \in \tilde{\mathcal{E}}(V) \otimes E$ dargestellt in der Form $\sum_{i=1}^{l} f_i \otimes e_i$ mit $e_i \in E$ und $f_i \in \tilde{\mathcal{E}}(V)$ für $i = 1,\ldots,l$, so gilt nach Definition der π-Topologie auf dem Tensorprodukt für alle $m,n \in \mathbb{N}$

$$s_{m,n}(f) \leq \sum_{i=1}^{l} s_{m,n}(f_i) q_m(e_i) \ , \text{ d.h. } s_{m,n}(f) \leq (s_{m,n} \otimes q_m)(f) \ .$$

Damit ist j stetig und nach dem Satz von der offenen Abbildung auch topologisch. •

1.8 Definition. Sei K eine kompakte Teilmenge von Z_N. Ferner sei

$(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge offener, relativ kompakter Umgebungen von K in Z_N, so daß für jedes $m\in\mathbb{N}$ $\overline{U_{m+1}}$ kompakt in U_m enthalten ist und jede Zusammenhangskomponente von U_m K trifft. Man definiert dann

$$\mathcal{Q}B(U_m) := \{f\in\mathcal{O}(U_m\cap\mathbb{C}^N) \mid f \text{ ist stetig auf } \overline{U_m}\cap\mathbb{C}^N \text{ fortsetzbar}$$
$$\text{und } \|f\|_m := \sup\{|f(z)|e^{\frac{1}{m}|z|} \mid z\in\overline{U_m}\cap\mathbb{C}^N\} < \infty\}$$

und versieht diesen Raum mit der von $\|\cdot\|_m$ erzeugten Normtopologie. Als Raum der *Keime schnell fallender holomorpher Funktionen auf K* bezeichnet man den topologischen induktiven Limes der Räume $\mathcal{Q}B(U_m)$ und schreibt

$$\mathcal{Q}(K) := \operatorname{ind}_{m\to} \mathcal{Q}B(U_m) .$$

1.9 Bemerkungen. 1) Da nach Voraussetzung $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Fundamentalfolge offener Umgebungen von K ist, hängt $\mathcal{Q}(K)$ nicht von der Wahl der U_m ab.

2) $\mathcal{Q}B(U_m)$ enthält nur beschränkte holomorphe Funktionen, so daß zunächst nicht klar ist, daß $\mathcal{Q}(K)$ ein Raum von Keimen holomorpher Funktionen ist. Setzt man für $m\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{Q}(U_m) := \{f\in\mathcal{O}(U_m\cap\mathbb{C}^N) \mid \text{für jedes Kompaktum } L\subset U_m \text{ und jede}$$
$$\text{natürliche Zahl } p\geq 2 \text{ gilt}$$
$$q_{m,L,p}(f) := \sup\{|f(z)|e^{\frac{1}{m}(1-\frac{1}{p})|z|} \mid z\in L\cap\mathbb{C}^N\} < \infty\} ,$$

und versieht man diesen Raum mit der durch die Halbnormen $q_{m,L,p}$ erzeugten Topologie, so so kann man $\mathcal{Q}B(U_m)$ für jedes $m\in\mathbb{N}$ stetig in $\mathcal{Q}(U_m)$ einbetten. Umgekehrt sichern die Voraussetzungen über die Mengen U_m die Stetigkeit der Inklusion $\mathcal{Q}(U_m)\to\mathcal{Q}B(U_{m+1})$, $m\in\mathbb{N}$. Daher gilt $\mathcal{Q}(K) = \operatorname{ind}_{m\to}\mathcal{Q}B(U_m) = \operatorname{ind}_{m\to}\mathcal{Q}(U_m)$.

1.10 Lemma. Für jedes $m\in\mathbb{N}$ ist $\mathcal{Q}(U_m)$ nuklear.

Beweis. Für ein beliebig gewähltes $m\in\mathbb{N}$ ist der Raum

$$S_m := \{f\in\mathcal{E}(\mathbb{C}^N) \mid \text{für jedes } p\in\mathbb{N} \text{ mit } p\geq 2 \text{ gilt}$$
$$\|f\|_{m,p} := \sup\{|f^{(\alpha)}(z)|e^{\frac{1}{m}(1-\frac{1}{p})|z|} \mid |\alpha|\leq p-2,\ z\in\mathbb{C}^N\} < \infty\},$$

versehen mit der durch das Halbnormensystem $(\|\cdot\|_{m,p})_{p\geq 2}$ er-

zeugten Topologie nach Swartz [38], Theorem 2 nuklear. Ist $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von U_m, so ist aufgrund der Vererbungseigenschaften der Nuklearität $S_m(L_n) := \{f \in S_m \mid \mathrm{Tr}(f) \subset L_n\}$ nuklear. Wie in 1.6 zeigt man dann, daß der Raum

$$S_m(U_m) := \{f \in \mathcal{E}(U_m \cap \mathbb{C}^N) \mid \text{für jedes } Q \subset U_m \text{ kompakt und jede natürliche Zahl } p \geq 2 \text{ gilt}$$

$$t_{m,Q,p}(f) = \sup\{|f^{(\alpha)}(z)| e^{\frac{1}{m}(1-\frac{1}{p})|z|} \mid z \in Q \cap \mathbb{C}^N, |\alpha| \leq p-2\} < \infty\},$$

versehen mit der natürlichen Topologie, topologisch isomorph zu $\operatorname{proj}_n S_m(L_n)$ ist. Somit ist $S_m(U_m)$ nuklear. Wie in 1.4 1) zeigt man, daß $\mathcal{Q}(U_m)$ ein topologischer Unterraum von $S_m(U_m)$ und daher nuklear ist. •

Bezeichnet man den induktiven (bzw. projektiven) Limes eines abzählbaren, kompakten induktiven Einbettungsspektrums (bzw. eines abzählbaren, kompakten, reduzierten projektiven Spektrums) als *(DFS)*- (bzw. *(FS)*-) *Raum* (vgl. Komatsu [19], p. 366), so gilt

1.11 Satz. Ist $K \subset Z_N$ kompakt, so ist $\mathcal{Q}(K)$ ein nuklearer (DFS)-Raum und sein starker Dualraum $\mathcal{Q}'_b(K)$ ein nuklearer (FS)-Raum.

Beweis. Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen liefert nach Wahl der Umgebungen U_m, $m \in \mathbb{N}$, von K die Injektivität der stetigen Einschränkungsabbildungen $j_{m,n}: \mathcal{OB}(U_m) \to \mathcal{OB}(U_n)$, $n \leq m$. Daher ist $(\mathcal{OB}(U_m), j_{m,n})_{m\in\mathbb{N}}$ ein induktives Einbettungsspektrum. Wie in Bierstedt et al. [2], Beweisteil (b) auf Seite 68 zeigt man, daß die Abbildungen $j_{m,n}$ kompakt sind (vgl. Junker [17], Kap. II, 1.7). Also ist $\mathcal{Q}(K)$ ein (DFS)-Raum und somit insbesondere Hausdorffsch (Floret;Wloka [6], § 25, 1.4). Die Nuklearität erhält man wegen 1.9 2) aus 1.10 und [6], § 27, 2.7. Die Aussage über $\mathcal{Q}'_b(K)$ folgt aus [6], § 27, 3.7 sowie § 26, 2.2. •

1.12 Satz (Kawai [18], 2.2.1). Für jede kompakte Teilmenge K von D_N ist $\mathcal{Q}(D_N)$ in $\mathcal{Q}(K)$ dicht.

Bemerkung. Dieser Satz beinhaltet ein Analogon zum Satz von Runge, denn jede in einer Umgebung von K schnell fallende holomorphe

Funktion kann auf K durch Keime approximiert werden, die auf ganz D_N definiert sind. Dieses Resultat liefert später (s. 3.7 und 3.8) einen wesentlichen Beitrag zum Nachweis, daß die Garbe $\mathcal{R}^E$ der E-wertigen Fourierhyperfunktionen auf D_N welk ist, d.h. jeder Schnitt in $\mathcal{R}^E$ über einer offenen Teilmenge $U \subsetneq D_N$ läßt sich zu einem globalen Schnitt fortsetzen.
Eine weitere Folgerung aus 1.12 wird sein, daß man die Schnitträume $\mathcal{R}^E(U)$, $U \subsetneq D_N$ offen, nicht mit einer auf natürliche Weise sich anbietenden Topologie versehen kann, so daß $\mathcal{R}^E$ eine topologische Garbe wird (s. 3.10).
Beim Beweis des Satzes schiebt man geeignete Räume zwischen $\mathcal{Q}(D_N)$ und $\mathcal{Q}(K)$ ein und verwendet ein Hahn-Banach-Argument.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wird noch ein Hilfsmittel bereitgestellt, das im fünften Abschnitt benutzt wird.

1.13 Definition (Gel'fand;Shilov [8], Chap. IV, 8.4). Sei G eine Teilmenge von $L^1(\mathbb{R}^N)$. Dann heißt G [illegible], falls jede lokalintegrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^N$ fast überall bez. des Lebesgue-Maßes m_N verschwindet, wenn für alle $g \in G$ $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ und $\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \cdot g(x)\, dm_N(x) = 0$ gilt.

1.14 Satz. Der Raum $\mathcal{Q}(D_N)$ ist reichhaltig.

Beweis. Es werden die Bedingungen des Kriteriums aus [8], p. 236 nachgewiesen. Dazu beachte man, daß die Funktion

$\psi(z) := \exp\left[-\sum_{j=1}^{N} z_j^2\right]$, $z \in \mathbb{C}^N$, keine reelle Nullstelle besitzt.

Wegen $|\psi(z)| = \exp(-\|\mathrm{Re}(z)\|_2^2 + \|\mathrm{Im}(z)\|_2^2)$, $z \in \mathbb{C}^N$, gilt $\psi \in \mathcal{Q}(D_N)$.

Ferner gilt für jedes $g \in \mathcal{Q}(U_n)$, $n \in \mathbb{N}$, jedes $y \in \mathbb{R}^N$ sowie für jedes $z \in U_n \cap \mathbb{C}^N$

$$|g(z) \cdot e^{-i\cdot\langle z,y\rangle}| = |g(z)| \exp\left[\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Im}(z_j) \cdot y_j\right] \leq |g(z)|\, e^{\frac{1}{n}\|y\|_1},$$

d.h. $g \cdot e_y \in \mathcal{Q}(D_N)$, wobei $e_y(z) := \exp(-i\langle z,y\rangle)$, $z \in \mathbb{C}^N$.

Damit folgt aus dem eben zitierten Satz die Behauptung. •

§ 2 Die Dolbeault - Auflösung der Garbe $\mathcal{O}$

Ziel dieses Abschnittes ist es, für die Garbe $\mathcal{O}$ der Keime langsam wachsender holomorpher Funktionen auf Z_N eine Auflösung durch Garben von Keimen langsam wachsender $\mathcal{C}^\infty$-Differentialformen vom Bigrad $(0,q)$, $q \in \mathbb{N}_0$, auf Z_N anzugeben (2.8). Aufgrund von Garbeneigenschaften gilt $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N} = \mathcal{O}$. Daher stellt die angestrebte Aussage ein Analogon zur Dolbeault-Grothendieck-Auflösung von $\mathcal{O}$ dar. Der hierfür bekannte Beweis (s. z.B. Hörmander [13], 2.3.3) läßt sich jedoch nicht auf die Situation übertragen, in der man einen Keim zu einem Punkt $z \in Z_N \setminus \mathbb{C}^N$ betrachtet. Denn in diesem Fall kann man für z keine Umgebungsbasis aus Produktmengen angeben. Stattdessen nutzt man aus, daß Kawai in [18] eine Auflösung von $\mathcal{O}$ durch Garben von Keimen gewichteter L^2-Funktionen angegeben hat. Ist die rechte Seite der Gleichung $\bar\partial g = f$ langsam wachsend und beliebig oft differenzierbar, so gewinnt man mit Hilfe eines abstrakten Mittag-Leffler-Schlusses die Darstellung einer L^2-Lösung g (2.3), anhand derer man durch Kontrolle der Wachstumsabschätzungen zeigen kann, daß g eine langsam wachsende C^∞-Form ist (2.7). Dabei werden wesentlich das Sobolev-Lemma und die Hörmanderschen L^2-Abschätzungen ([13], Chap. IV) benutzt.

Betrachtet man auf $\mathbb{C}^N$ die 1-Norm $|z|_1 := \sum_{n=1}^{N} |z_n|$, so gilt für alle $u_o \in \mathbb{C}$, alle $z,w \in \mathbb{C}^N$ und für jedes $R > 0$

$$|z + u_o w|_1 = |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[z + (u_o + Re^{it})w]dt|_1 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|z + (u_o + Re^{it})w|_1 dt ,$$

so daß die 1-Norm nach Hörmander [13], 2.6.1 auf $\mathbb{C}^N$ plurisubharmonisch ist.
Sei ρ eine beliebig oft differenzierbare Glättungsfunktion mit $Tr(\rho) = \{z \in \mathbb{C}^N \mid |z| \leq 1\}$, $\rho \geq 0$ und $\|\rho\|_{L^1} = 1$, die nur von $|z_j|$, $j = 1,\ldots,N$, abhängt. Dann ist nach [13], 2.6.2 und 2.6.3 die Funktion

$$t(z) := (\rho * |\cdot|_1)(z) + \Phi(z) \quad \text{mit} \quad \Phi(z) := \sum_{n=1}^{N} Im(z_n)^2$$

beliebig oft differenzierbar und streng plurisubharmonisch auf $\mathbb{C}^N$. Denn sind $z,w \in \mathbb{C}^N$ beliebig, so gilt, wenn man mit $H_f(z)$ die

Hessesche Matrix einer Funktion f im Punkt z bezeichnet:

$$(H_t(z)\, w,w) = (H_{\rho * |\cdot|_1}(z)\, w,w) + (H_\Phi(z)\, w,w) \geq (H_\Phi(z)\, w,w) = 2|w|_1 .$$

Betrachtet man t auf $U \subset \mathbb{C}^N$ mit $C := \sup\{|\mathrm{Im}(z)| \mid z \in U\} < \infty$, so wachsen die Ableitungen von t höchstens wie Polynome. Für beliebige $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ und $z \in \mathbb{C}^N$ gilt

$$|t^{(\alpha)}(z)| \leq |(\rho^{(\alpha)} * |\cdot|_1)(z)| + |\Phi^{(\alpha)}(z)| \leq$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\rho^{(\alpha)}(x)|(|x|_1 + |z|_1)\, dm_{2N}(x) + 2C^2 \leq$$
$$\leq A|z|_1 + B .$$

Ferner existieren unter diesen Voraussetzungen positive Konstanten R_0 und R_1, so daß für alle $z \in \mathbb{C}^N$

$$R_1 \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{2}}|z|} \leq e^{t(z)} \leq R_0 \cdot e^{\sqrt{2N}|z|}$$

gilt. Für $y \in \mathbb{R}^{2N}$ kann man t wie folgt abschätzen:

$$t(y) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho(x)\|y-x\|_1 dm_{2N}(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\|y\|_1 \|\rho\|_{L^1} - \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho(x)\|x\|_1 dm_{2N}\Big) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\|y\|_1 - r_1)$$

$$t(y) \leq (\rho * |\cdot|_1)(y) + C^2 \leq \|y\|_1 \|\rho\|_{L^1} + \int_{\mathbb{R}^{2N}} \rho(x)\|x\|_1 dm_{2N} + C^2 = \|y\|_1 + r_0$$

Dabei ist $\|y\|_1 := \sum_{j=1}^{2N} |y_j|$. Mit $R_1 := e^{\frac{-1}{\sqrt{2}} r_1}$ und $R_0 := e^{r_0}$ folgt dann obige Behauptung.

Bezeichnung. Ist V eine offene Teilmenge von Z_N, so wird mit $\mathcal{E}_q(V,E)$, $q \in \mathbb{N}_0$, der Raum der langsam wachsenden C^∞-Differential-$(0,q)$-Formen auf $V \cap \mathbb{C}^N$ mit Werten in E bezeichnet. Für $q \leq N$ ist $\tilde{\mathcal{E}}_q(V,E)$ die $\binom{N}{q}$-fache direkte Summe von $\mathcal{E}(V,E)$, während für $q > N$ $\tilde{\mathcal{E}}_q(V,E) = 0$ gilt.

2.1 Lemma. Die Prägarben $\{\mathcal{E}(V,E), r_{V,U}\}_{V \subset Z_N \text{ offen}}$ und $\{\tilde{\mathcal{E}}_q(V,E), r_{V,U}\}_{V \subset Z_N \text{ offen}}$ sind Garben, wobei $0 \leq q \leq N$ gelte sowie mit $r_{V,U}$ für offene Teilmengen U,V von Z_N mit $U \subset V$ die je-

weiligen Einschränkungsabbildungen bezeichnet seien.

Beweis. Die Einschränkungsabbildungen genügen den Verträglichkeitsbedingungen für induktive Spektren, so daß die angegebenen Systeme Prägarben definieren. Es sind also nur noch die Bedingungen (G1) und (G2) aus Kultze [23], 4.7 und 4.8 nachzuweisen.

Da stetige Funktionen, die lokal verschwinden, bereits global $= 0$ sind, ist (G1) in beiden Fällen trivialerweise erfüllt.

Seien nun die Voraussetzungen von (G2) gegeben. Da Z_N als metrischer Raum insbesondere parakompakt ist (Schubert [35], I.8.7, Satz 4), kann man eine lokalendliche Verfeinerung $\{V_j \mid j \in J\}$ der gegebenen Überdeckung $\{U_i \mid i \in I\}$ wählen. Wegen [35], I.8.5, Satz 2 und I.8.6, Satz 2 kann man zusätzlich annehmen, daß zu jedem $j \in J$ ein $i_j \in I$ existiert, so daß V_j relativ kompakt in U_{i_j} enthalten ist. Setzt man dann $g_{i_j,j} = r_{U_{i_j},V_j}(g_{i_j})$, so wird durch $g(z) := g_{i_j,j}(z)$, falls $z \in V_j \cap \mathbb{C}^N$, eine E-wertige holomorphe bzw. beliebig oft differenzierbare Funktion auf $U \cap \mathbb{C}^N$ definiert.

Zur Untersuchung des Wachstumsverhaltens von g wähle man zu einer beliebigen, kompakten Teilmenge K von U endlich viele Mengen V_{j_l}, $1 \leq l \leq n$, die K überdecken. Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_o^{2N}$ und jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt daher

$$\sup\{q_m(g^{(\alpha)}(z))\exp(-\tfrac{1}{m}|z|) \mid z \in K \cap \mathbb{C}^N\} \leq$$

$$\leq \max_{l=1}^{n} \sup\{q_m(g_{i_{j_l},j_l}^{(\alpha)}(z))\exp(-\tfrac{1}{m}|z|) \mid z \in K \cap \overline{V_{j_l}} \cap \mathbb{C}^N\} .$$

D.h. es gilt $g \in \mathcal{O}(U,E)$ bzw. $g \in \tilde{\mathcal{E}}(U,E)$, was den Beweis beendet. •

Bezeichnungen. 1) Die zu diesen Garbendaten assoziierten Garben werden mit $\tilde{\mathcal{C}}^E$ bzw. $\tilde{\mathcal{E}}_q^E$ bezeichnet. Ist $E = \mathbb{C}$, so schreibt man $\mathcal{O}$ bzw. $\tilde{\mathcal{E}}_q$.

2) Um die benötigten Aussagen über die Existenz von L^2-Lösungen mit Wachstumsbedingungen formulieren zu können, werden folgende Abkürzungen eingeführt:

a) Für eine stetige Funktion $\chi: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{2N}$ offen, definiert

man $L^2(\Omega,\chi)$ als Quotient von $\{f\colon \Omega \to \mathbb{C} \mid f$ meßbar bez. m_{2N} und $\int_\Omega |f|^2 \exp(-\chi)\, dm_{2N} < \infty\}$ nach dem Raum der fast überall auf Ω bez. m_{2N} verschwindenden Funktionen. Für $q \in \mathbb{N}_o$ mit $q \leq N$ bezeichnet man mit $L^2_q(\Omega,\chi)$ die $\binom{N}{q}$-fache direkte Summe von $L^2(\Omega,\chi)$.

b) Setzt man $H(z) := 2\ln(1+|z|^2)$, $z \in \mathbb{C}^N$, und ist Φ wie in der Definition von t, so definiert man für natürliche Zahlen q mit $q \leq N-1$ sowie $l \in \{q-1, q, q+1\}$

$$X_{l,j} := L^2_l(\Omega, \tfrac{1}{j}t + (q+1-l)H + \Phi) \quad \text{sowie} \quad \pi^l_{j,j+1}\colon X_{l,j+1} \to X_{l,j}\,.$$

Der projektive Limes dieses projektiven Spektrums wird mit X_l bezeichnet. Erklärt man für alle $j \in \mathbb{N}$ und $l \in \{q-1, q\}$

$$\bar\partial_{l,j}\colon X_{l,j} \to X_{l+1,j}$$

im distributionellen Sinn, so erhält man einen linearen abgeschlossenen Operator mit dichtem Definitionsbereich $D(\bar\partial_{l,j})$ (s. Hörmander [13], p. 78), der einen dicht definierten linearen Operator $\bar\partial_l\colon X_l \to X_{l+1}$ induziert.

3) Für eine lineare Abbildung T wird im folgenden der Kern bzw. das Bild stets mit N(T) bzw. R(T) abgekürzt.

Zunächst sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \leq N$ fest gewählt. Dann gilt

2.2 Lemma. Das projektive Spektrum $\left\{N(\bar\partial_{q-1,j}),\ \pi^{q-1}_{j-1,j}\,|\,N(\bar\partial_{q-1,j})\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ ist reduziert, d.h. $N(\bar\partial_{q-1})$ ist dicht in jeder Stufe $N(\bar\partial_{q-1,j})$, $j \in \mathbb{N}$, falls Ω, aufgefaßt als Teilmenge von $\mathbb{C}^N$ beschränkten Imaginärteil hat.

Beweis. Für $l \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}^N$ sei $\psi_l(z) := \exp\left[-\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{N} z_n^2\right]$.

Da nach Voraussetzung $C_o := \sup\{\|\mathrm{Im}(z)\|_2^2 \mid z \in \Omega\}$ endlich ist, erhält man für alle $z \in \Omega$ und alle $l \in \mathbb{N}$

$$(2.2.1)\quad |\psi_l(z)| = \exp\left(-\tfrac{1}{l}\|\mathrm{Re}(z)\|_2^2 + \tfrac{1}{l}\|\mathrm{Im}(z)\|_2^2\right) \leq \exp\left(-\tfrac{1}{l}|z|^2 + \tfrac{2C_o}{l}\right).$$

Nach Konstruktion der Funktion t kann man daher zu allen natürlichen Zahlen k,l,n mit $k > n$ positive Konstanten $C(k,l,n)$ so wählen, daß für jedes $z \in \Omega$ $|\psi_l(z)|^2 \leq C \cdot \exp\left[-(\frac{1}{n}-\frac{1}{k})t(z)\right]$ gilt. Ist nun für ein $n \in \mathbb{N}$ $\psi \in N(\bar\partial_{q-1,n})$ beliebig gewählt, so gilt für alle $k,l \in \mathbb{N}$ mit $k > n$

$$\|\psi_l\psi\|_{q-1,k} := \int_\Omega |\psi_l\psi|^2 \, e^{-\frac{1}{k}t-2H-\Phi} \, dm \leq C(k,l,n) \int_\Omega |\psi|^2 \, e^{-\frac{1}{n}t-2H-\Phi} \, dm =$$

$$= C \, \|\psi\|_{q-1,n} < \infty ,$$

d.h. $\psi_l\psi \in X_{q-1,k}$ für alle $l,k \in \mathbb{N}$ mit $k > n$. Ist $k \leq n$, so gilt $\pi^{q-1}_{k,n}(\psi) \in X_{q-1,k}$ mit $\|\pi^{q-1}_{k,n}(\psi)\|_{q-1,k} \leq \|\psi\|_{q-1,n}$. Wegen (2.2.1) kann man daher für alle $l,k \in \mathbb{N}$ $\psi_l\psi$ als Element von $X_{q-1,k}$ auffassen. Da für jedes $l \in \mathbb{N}$ ψ_l holomorph ist, folgt aus der Definition der distributionellen Ableitung und nach Wahl von ψ, daß $\psi_l\psi \in N(\bar\partial_{q-1,k})$ für alle $l,k \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. $\psi_l\psi$ liegt im Kern von $\bar\partial_{q-1}$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Da für jedes $z \in \Omega$ die Folge $(\psi_l(z))_{l \in \mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert, gilt für jedes $\chi \in L^2(\Omega)$ fast überall auf Ω $\lim_{l\to\infty} |(1-\psi_l(z))\chi(z)|^2 = 0$. Außerdem gilt $|(1-\psi_l)\chi|^2 \leq 2(1+e^{4C})|\chi|^2$ sowie für alle $l \in \mathbb{N}$ $\|\psi_l\chi\|_{L^2} \leq e^{2C}\|\chi\|_{L^2}$. Der Lebesguesche Grenzwertsatz liefert somit

(2.2.2) Für jedes $\chi \in L^2(\Omega)$ konvergiert die Folge $(\psi_l\chi)_{l \in \mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega)$ gegen χ.

Wendet man dies auf alle Koeffizienten der $(q-1)$-Form $\psi \cdot \exp[-\frac{1}{2}(\frac{1}{n}t + 2H + \Phi)]$ an, so erhält man die Konvergenz der Folge $(\psi_l\psi)_{l \in \mathbb{N}}$ gegen ψ in $X_{q-1,n}$, was die Dichtheit von $N(\bar\partial_{q-1})$ in $N(\bar\partial_{q-1,n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beweist. •

Bemerkungen. 1) Ist $\psi \in N(\bar\partial_{q-1,n})$ beliebig oft differenzierbar auf Ω, so zeigt obiger Beweis, daß ψ durch eine Folge in $N(\bar\partial_{q-1}) \cap \mathcal{E}_{q-1}(\Omega)$ approximiert werden kann.

2) Das folgende Lemma stellt eine Verschärfung von Kawai [18],

2.1.1 dar, da man für die Lösung g der Gleichung $\bar{\partial}_{q-1} g = f$, $f \in N(\bar{\partial}_q)$, eine Darstellung erhält, die eine präzise Kontrolle des Wachstumsverhaltens von g gestattet. Anstelle des in [18] verwendeten Dualitätsschlusses wird nun ein abstraktes Mittag-Leffler-Argument benutzt (vgl. Bierstedt et al. [3], 2.8).

2.3 Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ pseudokonvex. Die Sequenz

$$X_{q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}_{q-1}} X_q \xrightarrow{\bar{\partial}_q} X_{q+1}$$

ist für alle $q \in \mathbb{N}_o$ mit $q \leq N$ exakt.

Beweis. Sei $f \in N(\bar{\partial}_q)$ beliebig. Für $n \in \mathbb{N}$ sei ferner $f_n := \pi_n^q(f)$. Nach Hörmander [13], 4.4.2 existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in X_{q-1,n}$, so daß $\bar{\partial}_{q-1,n}(u_n) = f_n$ sowie

$$\|u_n\|_{q-1,n} \leq \|f_n\|_{q,n} \tag{2.3.1}$$

gilt. Außerdem kann man annehmen, daß u_n orthogonal zu $N(\bar{\partial}_{q-1,n})$, $n \in \mathbb{N}$, gewählt ist. Denn $\bar{\partial}_{q-1,n}$ besitzt als abgeschlossener Operator einen abgeschlossenen Kern. Daher kann man zu $u_n \in X_{q-1,n} = N(\bar{\partial}_{q-1,n})^\perp \oplus N(\bar{\partial}_{q-1,n})$ Elemente $u_n^\perp \in N(\bar{\partial}_{q-1,n})^\perp$ sowie $u_n^o \in N(\bar{\partial}_{q-1,n})$ mit $u_n = u_n^\perp + u_n^o$ wählen. Wegen $u_n^\perp = u_n - u_n^o \in D(\bar{\partial}_{q-1,n})$, $\bar{\partial}_{q-1,n}(u_n^\perp) = \bar{\partial}_{q-1,n}(u_n) = f_n$ und $\|u_n^\perp\|_{q-1,n} \leq \|u_n\|_{q-1,n}$ erfüllt $u_n^\perp$ alle für u_n gefundenen Bedingungen.

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sei $v_n := \pi_{n-1,n}^{q-1}(u_n) - u_{n-1}$. Nach Wahl von u_{n-1} und u_n sowie wegen $\bar{\partial}_{q-1,n-1} \circ \pi_{n-1,n}^{q-1} = \pi_{n-1,n}^q \circ \bar{\partial}_{q-1,n}$ gilt $v_n \in N(\bar{\partial}_{q-1,n-1})$. Daher existiert nach 2.2 eine natürliche Zahl $l(n)$ mit $h_n := \psi_{l(n)} \cdot v_n \in N(\bar{\partial}_{q-1})$ und $\|v_n - \pi_{n-1}^{q-1}(h_n)\|_{q-1,n-1} < \frac{1}{2^n}$.

Sind $k,m,p \in \mathbb{N}$ mit $k < m$ beliebig gewählt, so folgt hieraus

$$\left\| \sum_{n=m}^{m+p} \pi_{k,n}(v_n - \pi_{n-1}^{q-1}(h_n)) \right\|_{q-1,k} \leq \sum_{n=m}^{m+p} \|v_n - \pi_{n-1}^{q-1}(h_n)\|_{q-1,n-1} <$$

$$< \sum_{n=m}^{m+p} 2^{-n} < 2^{-m+1} \xrightarrow{m \to \infty} 0 .$$

Also konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=k+1}^{\infty} (v_n - h_n)$ in $X_{q-1,k}$, wobei von jetzt an die Spektralabbildungen nicht mehr mit aufgeführt werden. Für alle natürlichen Zahlen $k \geq 2$ beachte man

$$u_1 + \sum_{n=2}^{k} (v_n - h_n) = u_1 + \sum_{n=2}^{k} (u_n - u_{n-1} - h_n) = u_k - \sum_{n=2}^{k} h_n \in X_{q-1,k} .$$

Daher konvergiert für alle natürlichen Zahlen k die (q-1)-Form

$$g := u_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (v_n - h_n)$$

in $X_{q-1,k}$ und damit auch in X_{q-1}.

Es ist noch zu zeigen, daß $\bar{\partial}_{q-1}(g) = f$ gilt.

Sei dazu $k \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Da für $n \geq k+1$ $v_n - h_n$ im Kern von $\bar{\partial}_{q-1,k}$ liegt, erhält man nach Wahl der h_n

$$\bar{\partial}_{q-1,k}(g) = \bar{\partial}_{q-1,k}\Big(u_k - \sum_{n=2}^{k} h_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} (v_n - h_n)\Big) = \bar{\partial}_{q-1,k}(u_k) = f_k ,$$

was die Behauptung impliziert. •

Die folgenden drei Lemmata liefern wesentliche Abschätzungen für den Nachweis, daß es eine Lösung $g \in \tilde{\mathcal{E}}_{q-1}(V)$ von $\bar{\partial}_{q-1}(g) = f$ gibt, wenn $f \in \tilde{\mathcal{E}}_q(V)$ und $V \subset Z_N$ eine geeignete offene Menge ist.

2.4 Lemma. Für $l \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen ψ_l wie im Beweis zu 2.2. Dann gibt es zu jedem $\alpha \in \mathbb{N}_o^{2N}$, $\alpha \neq 0$, ein $P_\alpha \in \mathbb{R}[X_1,..,X_{2N}]$ mit positiven Koeffizienten, so daß für jedes $l \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathbb{R}^{2N}$

$$|\psi_l^{(\alpha)}(x)| \leq \frac{1}{l} P_\alpha(|x_1|,..,|x_{2N}|)\,|\psi_l(x)|$$

gilt.

Der Beweis erfolgt durch einen einfachen Induktionsschluß und wird daher weggelassen. •

Bezeichnungen. Sei V eine $\tilde{\partial}$-pseudokonvexe Teilmenge von Z_N. Kawai bemerkt im Anschluß an die Definition [18], 2.1.3, daß dann $\Omega := V \cap \mathbb{C}^N$ pseudokonvex ist. Ferner sei $(K_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ eine kompakte

Ausschöpfung von V mit $K_\mu \subset \mathring{K}_{\mu+1}$, $\mu \in \mathbb{N}$. Ist $\nu_o \in \mathbb{N}$ geeignet gewählt, so sind für alle $\nu \geq \nu_o$ die Mengen $K_{\mu,\nu} := K_\mu \cap \overline{U_\nu(0)}$ nicht leer und kompakt in $\mathbb{C}^N$. Daher kann man zu jedem $\mu \in \mathbb{N}$ eine positive Zahl ε_μ sowie für alle $\nu \geq \nu_o$ stetige Funktionen $\varphi^o_{\mu,\nu}$ mit $0 \leq \varphi^o_{\mu,\nu} \leq 1$ wählen, so daß die C^∞-Funktion $\varphi_{\mu,\nu} := \varphi^o_{\mu,\nu} * \rho_{\varepsilon_\mu}$ ihren Träger in $K_{\mu+1,\nu+1}$ hat, auf einer Umgebung von $K_{\mu,\nu}$ gleich 1 ist und daß $0 \leq \varphi_{\mu,\nu} \leq 1$ gilt. Außerdem erhält man für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_o^{2N}$

$$\sup\{|\varphi^{(\alpha)}_{\mu,\nu}(x)| \mid x \in \mathbb{R}^{2N},\ \nu \in \mathbb{N} \text{ mit } \nu \geq \nu_o\} \leq \|\rho^{(\alpha)}_{\varepsilon_\mu}\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}.$$

Für die folgenden Überlegungen sei $f = \sum'_{|J|=q} f_J \, d\bar{z}_J \in \mathcal{E}_{p,q}(V) \cap X_{p,q}$ mit $\bar{\partial}_q(f) = 0$ beliebig gewählt. Dabei ist $q \in \mathbb{N}$ mit $q \leq N$.

2.5 Lemma. Zu jedem $r > 0$, jedem $\mu \in \mathbb{N}$ und zu jedem $s \in \mathbb{N}_o$ existiert eine positive Konstante $C(s,r,\mu)$, so daß für alle Koeffizienten f_J der q-Form f und alle $\alpha \in \mathbb{N}_o^{2N}$ mit $|\alpha| \leq s$ gilt

$$(2.5.1) \qquad \int_{K_\mu \cap \mathbb{R}^{2N}} |(f_J \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}(x)|^2 \, dm_{2N}(x) \leq C(s,r,\mu).$$

Beweis. Seien $r > 0$, $\mu \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_o^{2N}$ beliebig sowie ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < r$ gewählt. Da V nach Definition beschränkten Imaginärteil hat, wachsen die Ableitungen von t nur wie Polynome. Daher kann man für jedes $\rho \in (0,r]$ eine Konstante $B(\rho,|\alpha|) > 0$ finden, so daß

$$(2.5.2) \qquad |(e^{-rt})^{(\alpha)}| \leq B(\rho,|\alpha|) \cdot e^{-(r-\rho)t}, \quad \forall\, \beta \in \mathbb{N}_o^{2N} \text{ mit } |\beta| \leq |\alpha|$$

gilt. Ist $\rho \in (0, r-\frac{1}{n})$, so erhält man für jedes $z \in K_\mu \cap \mathbb{C}^N$ und jeden Koeffizienten f_J

$$|(f_J \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}(z)|^2 \leq 2^{c_\alpha} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}^2 |f_J^{(\alpha-\beta)}(z)|^2 |(e^{-rt})^{(\beta)}(z)|^2 \leq$$

$$\leq 2^{2|\alpha| + c_\alpha} \Big(B(\rho,|\alpha|) \sup\{|f_J^{(\gamma)}(w)| e^{-\frac{1}{n}t(w)} \mid w \in K_\mu \cap \mathbb{C}^N, |\gamma| \leq |\alpha|, |J| = q\} \Big)^2 \cdot$$

$$\cdot \exp[-2(r-\rho-\tfrac{1}{n})t(z)],$$

wobei $c_\alpha := \prod_{k=1}^{2N} (\alpha_k + 1)$. Dies impliziert die Behauptung, da

$r - \rho - \frac{1}{n} > 0$ und somit $\exp[-2(r-\rho-\frac{1}{n})t] \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$.

Ist f wie eben und bezeichnet man für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $u_n = \sum'_{|I|=q-1} u_{nI}\, d\bar{z}_I$ die im Beweis zu 2.3 gefundene Lösung der Gleichung $\bar{\partial}_{q-1,n}(u_n) = f_n$, die orthogonal zum Kern von $\bar{\partial}_{q-1,n}$ ist, so ist u_n bereits beliebig oft differenzierbar auf Ω. Dies zeigt der Beweis zu Hörmander [13], 4.2.5, wenn man im Fall $q > 1$ beachtet, daß $\frac{1}{n}t + 2H + \Phi$ eine C^∞- Funktion ist, d.h. der zu $\bar{\partial}_{q-2,n}$ adjungierte Operator besitzt C^∞-Koeffizienten. Daher gilt

2.6 Lemma. Für jedes $s \in \mathbb{N}_0$, alle $n, \mu \in \mathbb{N}$ und für alle reellen Zahlen $r \in (\frac{1}{2n}, 1]$ gibt es eine Konstante $A(s,r,f_n,\mu) > 0$, die in den Variablen s und μ monoton wächst, so daß für alle Koeffizienten u_{nI} von u_n und für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ mit $|\alpha| \leq s$ gilt

$$\int_{K_\mu \cap \mathbb{R}^{2N}} |(u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}(x)|^2 \, dm_{2N}(x) \leq A(s,r,f_n,\mu) .$$

Beweis. Die Behauptung wird durch vollständige Induktion nach s gezeigt, wobei im Induktionsschritt die Fälle $q = 1$ und $q > 1$ getrennt behandelt werden müssen.
Im folgenden seien die Parameter $n, \mu \in \mathbb{N}$ und $r \in (\frac{1}{2n}, 1]$ beliebig gewählt.

1) $s = 0$. Für alle $z \in \Omega := V \cap \mathbb{C}^N$ gilt

$$|e^{2H+\Phi}(z)| \leq (1+|z|^2)^4 \sup\{e^{\|\mathrm{Im}(z)\|_2^2} \mid z \in \Omega\} \leq c(r,n) \cdot e^{(2r-\frac{1}{n})t(z)} .$$

Wegen (2.3.1) erhält man daher für jeden Koeffizienten von u_n

$$\int_{K_\mu \cap \mathbb{R}^{2N}} |u_{nI} \cdot e^{-rt}|^2 \, dm_{2N} \leq c(r,n) \cdot \int_{K_\mu \cap \mathbb{R}^{2N}} |u_{nI}|^2 \cdot e^{-\frac{1}{n}t - 2H - \Phi} \, dm_{2N}$$

$$\leq c \cdot \|u_n\|^2_{q-1,n} \cdot c \cdot \|f_n\|^2_{q,n} .$$

2) $s \to s+1$; $q = 1$. Sei zusätzlich $\rho := \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}(r - \frac{1}{2n}) \in (\frac{1}{2n}, r)$.
Nach Wahl der 0-Form u_n gilt für alle $1 \leq j \leq N$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\left(u_n \cdot e^{-rt}\right) = \left(\frac{\partial u_n}{\partial \bar{z}_j} - r\frac{\partial t}{\partial \bar{z}_j}\right) \cdot e^{-rt} =$$

$$= f_{nj} \cdot e^{-rt} - r\,\frac{\partial t}{\partial \bar{z}_j}\, e^{-(r-\rho)t} \cdot u_n \cdot e^{-\rho t} .$$

Daher erhält man für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ mit $|\alpha| \leq s$ wegen (2.5.2)

$$\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\left(u_n\cdot e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\right|^2 \leq$$

$$\leq 2\left|\left(f_{nj}e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\right|^2 + 2^{C_\alpha}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}^2\left|\left(\frac{\partial t}{\partial\overline{z}_j}e^{-(r-\rho)t}\right)^{(\alpha-\beta)}\right|^2\left|\left(u_n e^{-\rho t}\right)^{(\beta)}\right|^2$$

$$\leq 2\left|\left(f_{nj}e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\right|^2 + 2^{C_\alpha}\left(\frac{1}{r-\rho}B(r-\rho,|\alpha|+1)\right)^2\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}^2\left|\left(u_n e^{-\rho t}\right)^{(\beta)}\right|^2 .$$

Aus 2.5 und der Induktionsannahme folgt somit für alle $\alpha\in\mathbf{N}_o^{2N}$ mit $|\alpha|\leq s$ und für alle $1\leq j\leq N$

(2.6.1)
$$\int_{K_\mu\cap\mathbf{R}^{2N}}\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\left(u_n\cdot e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\right|^2 dm_{2N} \leq$$

$$\leq c(s)\left(\frac{2}{r-\frac{1}{2n}}\cdot B\left(\tfrac{1}{2}(r-\tfrac{1}{2n}),s+1\right)\right)^2 A\left(s,\tfrac{1}{2}(r-\tfrac{1}{2n}),f_n,\mu\right) + 2C(s,r,\mu)$$

$$=: A_o(s+1,r,f_n,\mu) .$$

Andererseits erhält man für alle $\alpha\in\mathbf{N}_o^{2N}$ mit $|\alpha|\leq s$, für jedes $1\leq j\leq N$ und für jedes $\nu\geq\nu_o$ unter Beachtung von Hörmander [13], 4.2.4

$$\int_{K_{\mu,\nu}}\left|\frac{\partial}{\partial z_j}\left(u_n\cdot e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\right|^2 dm_{2N} \leq \int_{\mathbf{R}^{2N}}\left|\varphi_{\mu,\nu}\frac{\partial}{\partial z_j}\left(u_n\cdot e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\right|^2 dm_{2N} =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^{2N}}\left|\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\varphi_{\mu,\nu}\left(u_n e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\right) - \left(u_n e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\cdot\frac{\partial\varphi_{\mu,\nu}}{\partial z_j}\right|^2 dm_{2N} \leq$$

$$\leq 2\left[\int_{\mathbf{R}^{2N}}\left|\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\varphi_{\mu,\nu}\left(u_n e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\right)\right|^2 dm + \int_{K_{\mu+1}\cap\mathbf{R}^{2N}}\left|\left(u_n e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\frac{\partial\varphi_{\mu,\nu}}{\partial z_j}\right|^2 dm\right]$$

$$\leq 2\int_{\mathbf{R}^{2N}}\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\left(\varphi_{\mu,\nu}\left(u_n e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\right)\right|^2 dm + 2\sup_{|\beta|=1}\left\|\varepsilon_\mu^{(\beta)}\right\|_{L^1}^2\cdot A(s,r,f_n,\mu+1) \leq$$

$$4\left[\int_{\mathbf{R}^{2N}}\left|\left(u_n e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\frac{\partial\varphi_{\mu,\nu}}{\partial\overline{z}_j}\right|^2 dm + \int_{\mathbf{R}^{2N}}\varphi_{\mu,\nu}^2\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\left(u_n e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\right|^2 dm\right] + c(\mu)\cdot A$$

$$\leq 3c(\mu)\cdot A(s,r,f_n,\mu+1) + 4\int_{K_{\mu+1}\cap\mathbf{R}^{2N}}\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\left(u_n\cdot e^{-rt}\right)^{(\alpha)}\right|^2 dm \leq$$

$$\leq 3c(\mu)\cdot A(s,r,f_n,\mu+1) + 4A_o(s+1,r,f_n,\mu+1) < \infty$$

unabhängig von ν. Also ist die linke Seite dieser Ungleichung beschränkt für $\nu\to\infty$, was zusammen mit der Abschätzung (2.6.1) die Behauptung im Fall $q = 1$ beweist.

3) $s\to s+1;\ q > 1$. In diesem Fall nutzt man aus, daß die $(q-1)$-

Form u_n orthogonal zu $N(\bar\partial^*_{q-1,n})$ gewählt wurde. Es gilt daher $u_n \in \overline{R(\bar\partial^*_{q-1,n})}$. Kawai [18], 2.1.1 zeigt, daß $\bar\partial^*_{q-1,n}$ abgeschlossenes Bild hat. Da $\bar\partial^*_{q-2,n}\cdot\bar\partial^*_{q-1,n} = 0$, erhält man

$$\vartheta_{q-2,n}\left(e^{-\frac{1}{n}t-2H-\Phi}\cdot u_n\right) = 0 ,$$

wobei nach [13], (4.1.9) $\vartheta_{q-2,n}(\omega) := -\sum_{|L|=q-2}{}' \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial \omega_{l,L}}{\partial z_l}\, d\bar z_L$ für $\omega \in X_{q-1,n}$'. Daher gilt

$$\vartheta_{q-2,n}(u_n) = -e^{\frac{1}{n}t+3H+\Phi} \sum_{|L|=q-2}{}' \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_l}\left(e^{-\frac{1}{n}t-2H-\Phi}\right) u_{n\ l,L}\, d\bar z_L$$

$$= \sum_{|L|=q-2}{}' \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_l}\left(\frac{1}{n}t+2H+\Phi\right)\cdot e^{H}\, u_{n\ l,L}\, d\bar z_L .$$

Ist ω eine C^∞-Differential-p-Form, so wird im folgenden für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ die Abkürzung $\omega^{(\alpha)} := \sum_{|M|=p}{}' \omega_M^{(\alpha)}\, d\bar z_M$ benutzt.

Sei nun $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ mit $|\alpha| \le s$ beliebig gewählt. Da für jedes $\nu \ge \nu_0$ die C^∞-(q-1)-Form $\varphi_{\mu,\nu}\cdot(u_n\cdot e^{-rt})^{(\alpha)}$ kompakten Träger in $\mathbb{C}^N$ hat, gehört sie zu den Definitionsbereichen von $\vartheta_{q-2,n}$ und $\bar\partial_{q-1,n}$, und es gilt

$$\vartheta_{q-2,n}\left(\varphi_{\mu,\nu}(u_n e^{-rt})^{(\alpha)}\right) = \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left(\varphi_{\mu,\nu}(e^{-rt})^{(\alpha-\beta)}\vartheta_{q-2,n}(u_n^{(\beta)}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{|L|=q-2}{}' \sum_{l=1}^{N}\left[\frac{\partial\varphi_{\mu,\nu}}{\partial z_l}(e^{-rt})^{(\alpha-\beta)} + \varphi_{\mu,\nu}\cdot\frac{\partial}{\partial z_l}(e^{-rt})^{(\alpha-\beta)}\right] u_{n\ l,L}^{(\beta)}\, d\bar z_L\right)$$

$$= \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta} \sum_{|L|=q-2}{}' \sum_{l=1}^{N}\left[\left(\varphi_{\mu,\nu}\frac{\partial}{\partial z_l}\left(\frac{1}{n}t+2H+\Phi+\varphi_{\mu,\nu}\right)\right)(e^{-rt})^{(\alpha-\beta)}\cdot e^{H} + \right.$$

$$\left. + \varphi_{\mu,\nu}\cdot\frac{\partial}{\partial z_l}(e^{-rt})^{(\alpha-\beta)}\right]\cdot u_{n\ l,L}^{(\beta)}\, d\bar z_L .$$

Setzt man wieder $\rho := \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}(r - \frac{1}{2n})$, so kann man die Koeffizienten von $u_{n\ l,L}^{(\beta)}$ in dieser Darstellung dem Betrage nach auf $K_{\mu+1} \cap \mathbb{R}^{2N}$ durch $C(s,\rho)\cdot e^{-\rho t}$ abschätzen. Daher erhält man

$$\left\| \vartheta_{q-2,n}\left(\varphi_{\mu,\nu}(u_n \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}\right)\right\|^2_{L^2} \leq$$

$$\leq 2^{c_\alpha - 1}\, C(s,\rho)^2 \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}^2 \sum_{|I|=q-1}' \int_{K_{\mu+1} \cap \mathbb{R}^{2N}} \left| u_{nI}^{(\beta)} \right|^2 \cdot e^{-2\rho t}\, dm_{2N} .$$

Mit $\rho' := \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{2n}) \in (\frac{1}{2n}, \rho)$ folgt dann für alle $\beta \leq \alpha$ und für jeden Koeffizienten u_{nI} von u_n

$$(2.6.2) \quad \left| u_{nI}^{(\beta)} \right| = \left| (u_{nI} \cdot e^{-\rho' t} \cdot e^{\rho' t})^{(\beta)} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \left| (e^{\rho' t})^{(\beta-\gamma)} \right| \cdot \left| (u_{nI} \cdot e^{-\rho' t})^{(\gamma)} \right| \leq$$

$$\leq C(s,\rho') \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \left| (u_{nI} \cdot e^{-\rho' t})^{(\gamma)} \right| e^{\rho t} .$$

Also kann man nach Induktionsannahme $\left\| \vartheta_{q-2,n}\left(\varphi_{\mu,\nu}(u_n e^{-rt})^{(\alpha)}\right)\right\|^2_{L^2}$ durch eine von ν unabhängige Konstante $A_1(s,r,f_n,\nu+1)$ abschätzen. Nach Wahl von u_n gilt ferner für jedes $\nu \geq \nu_0$

$$\bar\partial_{q-1,n}\left(\varphi_{\mu,\nu}(u_n \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}\right) = \sum_{|I|=q-1}' \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial \varphi_{\mu,\nu}}{\partial \bar z_i} \cdot (u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)} + \right.$$

$$\left. + \varphi_{\mu,\nu} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\{ \frac{\partial u_{nI}^{(\beta)}}{\partial \bar z_i} (e^{-rt})^{(\alpha-\beta)} + \frac{\partial}{\partial \bar z_i}(e^{-rt})^{(\alpha-\beta)} \cdot u_{nI}^{(\beta)} \right\} \right] d\bar z_i \wedge d\bar z_I =$$

$$= \sum_{|I|=q-1}' \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \varphi_{\mu,\nu}}{\partial \bar z_i} (u_n \cdot e^{-rt})^{(\alpha)} + \varphi_{\mu,\nu} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{\partial (e^{-rt})^{(\alpha-\beta)}}{\partial \bar z_i} \cdot u_{nI}^{(\beta)}\, d\bar z_i \wedge d\bar z_I +$$

$$+ \varphi_{\mu,\nu} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} f_n^{(\beta)} \cdot (e^{-rt})^{(\alpha-\beta)} =$$

$$= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{|I|=q-1}' \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial \varphi_{\mu,\nu}}{\partial \bar z_i} (e^{-rt})^{(\alpha-\beta)} + \varphi_{\mu,\nu} \frac{\partial (e^{-rt})^{(\alpha-\beta)}}{\partial \bar z_i} \right] u_{nI}^{(\beta)}\, d\bar z_i \wedge d\bar z_I +$$

$$+ \varphi_{\mu,\nu} \cdot (f_n \cdot e^{-rt})^{(\alpha)} .$$

Beachtet man nun, daß wie eben die Koeffizienten von $u_{nI}^{(\beta)}$ auf $K_{\mu+1} \cap \mathbb{R}^{2N}$ betragsmäßig langsamer wachsen als $C(s,\rho) \cdot e^{-\rho t}$, so erhält man folgende Abschätzung:

$$\left| \bar\partial_{q-1,n}\left(\varphi_{\mu,\nu}(u_n \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}\right)\right|^2 \leq 2^{c_\alpha} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta}^2 \sum_{|I|=q-1}' C(s,\rho)^2 \left| u_{nI}^{(\beta)} \right|^2 e^{-2\rho t} +$$

$$+ 2\varphi_{\mu,\nu}^2 \left| (f_n \cdot e^{-rt})^{(\alpha)} \right|^2 .$$

Wegen (2.5.1) und (2.6.2) kann man $\left\| \bar{\partial}_{q-1,n}\left(\varphi_{\mu,\nu}(u_n \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}\right)\right\|_{L^2}^2$ unabhängig von ν durch $A_2(s,r,f_n,\mu+1)$ abschätzen.

Für einen beliebigen Koeffizienten u_{nI} von u_n liefert die Anwendung von [13], 4.2.4 und (4.2.13) auf $\varphi_{\mu,\nu}(u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}$ für alle $1 \le j \le N$

$$\int_{K_{\mu,\nu}} \left| \frac{\partial}{\partial z_j}(u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)} \right|^2 dm \le \int_{\mathbb{R}^{2N}} \left| \varphi_{\mu,\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial z_j}(u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)} \right|^2 dm \cdot$$

$$\le 2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} \left[\left| \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\varphi_{\mu,\nu}(u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}\right) \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi_{\mu,\nu}}{\partial z_j} \right|^2 \left| (u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)} \right|^2 \right] dm \le$$

$$\le 2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\left(\varphi_{\mu,\nu}(u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}\right) \right|^2 dm + 2 \sup\{ \| \rho_{\varepsilon_\mu}^{(\beta)} \|_{L^1}^2 \mid |\beta| = 1 \} \cdot$$

$$\cdot \int_{K_{\mu+1} \cap \mathbb{R}^{2N}} \left| (u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)} \right|^2 dm \le$$

$$\le 4 \left\| \bar{\partial}_{q-2,n}\left(\varphi_{\mu,\nu}(u_n \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}\right) \right\|_{L^2}^2 + 2 \left\| \bar{\partial}_{q-1,n}\left(\varphi_{\mu,\nu}(u_n \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}\right) \right\|_{L^2}^2 +$$

$$+ c(\mu) \cdot A(s,r,f_n,\mu+1) \le$$

$$\le 4 A_1 + 2 A_2 + c(\mu) \cdot A =: A_3(s,r,f_n,\mu+1)$$

unabhängig von ν, so daß insgesamt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^{2N}$ mit $|\alpha| \le s$, für jedes $1 \le j \le N$ sowie für alle Koeffizienten u_{nI}

$$\int_{K_\mu \cap \mathbb{R}^{2N}} \left| \frac{\partial}{\partial z_j}(u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)} \right|^2 dm \le A_3$$

folgt.

Eine analoge Abschätzung für die Ableitungen nach $\bar{z}_j$, $1 \le j \le N$, ergibt sich aus dem eben Gezeigten durch erneute Anwendung von [13], 4.2.4. Es gilt

$$\int_{K_{\mu,\nu}} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)} \right|^2 dm \le 2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} \left[\left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\left(\varphi_{\mu,\nu}(u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}\right) \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\partial \varphi_{\mu,\nu}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 \left| (u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)} \right|^2 \right] dm \le$$

$$2 \int_{\mathbb{R}^{2N}} \left| \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\varphi_{\mu,\nu}(u_{nI} \cdot e^{-rt})^{(\alpha)}\right) \right|^2 dm + 2 \sup\{ \| \rho_{\varepsilon_\mu}^{(\beta)} \|_{L^1}^2 \mid |\beta| = 1 \} \cdot$$

$$\cdot \int_{K_{\mu+1}\cap\mathbb{R}^{2N}} \left|(u_{nI}\cdot e^{-rt})^{(\alpha)}\right|^2 dm \leq$$

$$\leq 4\left[\int_{\mathbb{R}^{2N}}\left|\frac{\partial\varphi_{\mu,\nu}}{\partial z_j}\right|^2\left|(u_{nI}\cdot e^{-rt})^{(\alpha)}\right|^2 dm + \int_{K_{\mu+1}\cap\mathbb{R}^{2N}}\left|\frac{\partial(u_{nI}\cdot e^{-rt})^{(\alpha)}}{\partial z_j}\right|^2 dm\right] +$$

$$+ c(\mu)\cdot A(s,r,f_n,\mu+1) \leq$$

$$\leq 3\, c(\mu)\cdot A(s,r,f_n,\mu+1) + A_3(s,r,f_n,\mu+2)\ .$$

Damit gilt auch im Fall $q > 1$ die behauptete Abschätzung für alle Ableitungen der Ordnung $\leq s+1$.
Verfolgt man die Abschätzungen, so sieht man leicht ein, daß man A so wählen kann, daß es in s und μ monoton wächst. •

2.7 Satz. Für jedes $f \in \mathcal{E}^{0}_{q}(V) \cap X_q$ mit $\bar\partial_q(f) = 0$ ist die im Beweis zu 2.3 angegebene Lösung der Gleichung $\bar\partial_{q-1}(g) = f$ eine langsam wachsende C^∞-(q-1)-Form auf $V \cap \mathbb{C}^N$.

Beweis. Nach 2.3 besitzt die Lösung für jede natürliche Zahl m folgende Darstellung:

$$g = u_m - \sum_{n=2}^{m} h_n + \sum_{n=m+1}^{\infty}(v_n - h_n)\ .$$

Dabei sind für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ $v_n = u_{n-1} - u_n$ sowie $h_n = \psi_{l(n)}\cdot v_n$, $l(n) \in \mathbb{N}$ geeignet, beliebig oft differenzierbare (q-1)-Formen, da u_n, $n \in \mathbb{N}$, eine C^∞-(q-1)-Form ist. Obige Darstellung von g legt es nahe, das Wachstumsverhalten der einzelnen Summanden getrennt zu untersuchen. Im ersten Schritt wird gezeigt, daß für alle $m,\mu \in \mathbb{N}$, für jedes $r > \frac{1}{m}$ und für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_o^{2N}$ $\sup\{|u_m^{(\alpha)}(z)|e^{-rt(z)} \mid z \in K_\mu \cap \mathbb{C}^N\}$ endlich ist. Hieraus folgt dann eine analoge Abschätzung für die Formen h_n, $2 \leq n \leq m$. Im dritten Teil zeigt man, daß die unendliche Reihe in jeder Stufe des projektiven Limes $\mathcal{E}^{0}_{q-1}(V)$ für ein hinreichend großes m enthalten ist, was schließlich $g \in \mathcal{E}^{0}_{q-1}(V)$ liefert.

1) Seien $m,\mu \in \mathbb{N}$, $r > \frac{1}{m}$ sowie $\alpha \in \mathbb{N}_o^{2N}$ beliebig gewählt. Für $\rho := \frac{1}{m} + \frac{1}{2}(r - \frac{1}{m}) \in (\frac{1}{m}, r)$ und jedes $\nu \geq \nu_o$ haben alle Koeffizienten der Form $\varphi_{\mu,\nu}(u_m\cdot e^{-rt})^{(\alpha)}$ kompakten Träger in $\mathbb{C}^N \simeq \mathbb{R}^{2N}$,

so daß man auf jeden dieser Koeffizienten die Umkehrformel für die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2N})$ anwenden kann. Für $x \in \mathbb{R}^{2N}$ und $s \in \mathbb{N}$ sei $k_s(x) := (1+\|x\|_2^2)^{s/2}$. Mit $s = |\alpha| + N + 1$ folgt daher wegen (2.6.2) für alle $z \in K_{\mu,\nu}$

$$(2.7.1)\quad |u_{mI}^{(\alpha)}(z)|e^{-rt(z)} \le C_1(|\alpha|,r) \sup_{\beta\le\alpha} \left|\left(\varphi_{\mu,\nu} u_{mI} e^{-\rho t}\right)^{(\beta)}(z)\right| \cdot$$

$$\le C_1 \sup_{\beta\le\alpha} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|x^\beta|}{k_s(x)}\, k_s(x)\, \left|\widehat{\varphi_{\mu,\nu}\cdot u_{mI}\cdot e^{-\rho t}}\right| dm_{2N} \le$$

$$\le C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(1+\|x\|_2^2)^{|\alpha|}}{(1+\|x\|_2^2)^{s}} dm \int_{\mathbb{R}^{2N}} (1+\|x\|_2^2)^{s} \left|\widehat{\varphi_{\mu,\nu}\cdot u_{mI}\cdot e^{-\rho t}}\right|^2 dm\right]^{\frac12} \le$$

$$\le C_1 \left\|\frac{1}{k_{N+1}}\right\|_{L^2} \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \left[\int_{\mathbb{R}^{2N}} \|x\|_2^{2j} \left|\widehat{\varphi_{\mu,\nu}\cdot u_{mI}\cdot e^{-\rho t}}\right|^2 dm\right]^{\frac12} \le$$

$$\le C_2 \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \sum_{i=1}^{2N} \left[\int_{\mathbb{R}^{2N}} \left(|x_i|^j \left|\widehat{\varphi_{\mu,\nu}\cdot u_{mI}\cdot e^{-\rho t}}\right|\right)^2 dm\right]^{\frac12} \le$$

$$\le 2^{s+1} N C_2 \sup_{\substack{1\le j\le s\\ 1\le i\le 2N}} \left[\int_{\mathbb{R}^{2N}} \left|\widehat{\frac{\partial^j}{\partial x_i^j}\left(\varphi_{\mu,\nu}\cdot u_{mI}\cdot e^{-\rho t}\right)}\right|^2 dm\right]^{\frac12} \le$$

$$\le C_3(s,r) \cdot \sup_{\substack{1\le j\le s\\ 1\le i\le 2N}} \left[\int_{\mathbb{R}^{2N}} \left|\frac{\partial^j}{\partial x_i^j}\left(\varphi_{\mu,\nu}\cdot u_{mI}\cdot e^{-\rho t}\right)\right|^2 dm\right]^{\frac12},$$

wobei die beiden letzten Umformungen wegen Hörmander [14], Lemma 1.7.1 und der Parseval-Formel gelten. Weitere Abschätzungen liefern dann

$$(2.7.2)\quad |u_{mI}^{(\alpha)}(z)|e^{-rt(z)} \le$$

$$\le 2^s C_3 \sup_{\substack{1\le j\le s\\ 1\le i\le 2N}} \sum_{p=0}^{j} \binom{j}{p} \left[\int_{\mathbb{R}^{2N}} \left|\frac{\partial^{j-p}\varphi_{\mu,\nu}}{\partial x_i^{j-p}} \cdot \frac{\partial^p (u_{mI}\cdot e^{-\rho t})}{\partial x_i^p}\right|^2 dm\right]^{\frac12} \le$$

$$\le 2^{2s} C_3 \sup_{|\beta|\le s} \left[\left\|\rho_{\varepsilon_\mu}^{(\beta)}\right\|_{L^1} \cdot \int_{K_{\mu+1}\cap\mathbb{R}^{2N}} \left|(u_{mI}\cdot e^{-\rho t})^{(\beta)}\right|^2 dm\right]^{\frac12} \le$$

$$\le C_4(s,r,\mu) \cdot A(s,r,f_m,\mu+1)$$

unabhängig von ν. Hieraus folgt, daß für alle $m,\mu \in \mathbb{N}$, für jedes $r > \frac{1}{m}$ sowie für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_o^{2N}$ $\sup\{|u_m^{(\alpha)}(z)|e^{-rt(z)} | z \in K_\mu \cap \mathbb{C}^N\}$ endlich ist.

2) Sind die Parameter m,r,μ und α wie in 1) beliebig gewählt, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n \leq m$ $\sup\{|h_n^{(\alpha)}(z)|e^{-rt(z)} | z \in K_\mu \cap \mathbb{C}^N\} < \infty$. Denn wegen (2.2.1) und 2.4 erhält man folgende Abschätzung:

$$|h_n^{(\alpha)}(z)|e^{-rt(z)} \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\psi_{1(n)}^{(\alpha-\beta)}(z)|(|u_{n-1}^{(\beta)}(z)| + |u_n^{(\beta)}(z)|)e^{-rt(z)} \leq$$

$$\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (1 + P_{\alpha-\beta}(|z|))|\psi_{1(n)}(z)|(|u_{n-1}^{(\beta)}(z)| + |u_n^{(\beta)}(z)|)e^{-rt(z)} \leq$$

$$\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (1+P_{\alpha-\beta}(|z|))(|u_{n-1}^{(\beta)}(z)| + |u_n^{(\beta)}(z)|)e^{\frac{-1}{1(n)}|z|^2 - rt(z) + 2C_o} \leq$$

$$\leq C(\alpha,m,\varepsilon) \sup\{|u_j^{(\beta)}(z)|e^{-(\frac{1}{j}+\varepsilon)t(z)} | j = n-1,n \ ; \ \beta \leq \alpha\} < \infty$$

für ein geeignetes $\varepsilon = \varepsilon(m,r) > 0$.

3) Sind $m_o,\mu,p \in \mathbb{N}$, $m_o \geq 3$, $r > \frac{1}{m_o - 1}$ sowie $\alpha \in \mathbb{N}_o^{2N}$ mit $|\alpha| \leq m_o$ beliebig gewählt, so konvergiert $\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} (v_n - h_n)^{(\alpha)}(z)\right| e^{-rt(z)}$ gleichmäßig auf $K_\mu \cap \mathbb{C}^N$ gegen 0 für $m \to \infty$ unabhängig von p.

Zum Nachweis dieser Behauptung seien $\rho \in (\frac{1}{m_o - 1}, r)$ sowie für jedes $n \geq 3$ $\rho_n \in (\frac{1}{2(n-1)}, \frac{1}{2(n-2)})$ fest gewählt. Für alle $\beta \in \mathbb{N}_o^{2N}$ und alle $n \geq 3$ gilt dann wegen (2.5.2)

$$|(v_n \cdot e^{-\rho t})^{(\beta)}| = \left|\left(v_n \cdot e^{-\rho t} \cdot e^{-(\rho-\rho_n)t}\right)^{(\beta)}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \left|\left(v_n \cdot e^{-\rho_n t}\right)^{(\gamma)}\right| \cdot \left|\left(e^{-(\rho-\rho_n)t}\right)^{(\beta-\gamma)}\right| \leq$$

$$\leq 2^{|\beta|} B(\tfrac{1}{2}(\rho-\rho_n), |\beta|) \sup_{\gamma \leq \beta} \left|\left(v_n \cdot e^{-\rho_n t}\right)^{(\gamma)}\right| e^{-\frac{\rho-\rho_n}{2}t}.$$

Ist daher für $\gamma \in \mathbb{N}_o^{2N}$, $\gamma \neq 0$, P_γ wie in 2.4, so existiert für jedes $s \in \mathbb{N}_o$ und für jedes $n \geq 3$ eine Konstante $C_o(s,n)$ mit

$$\sup\{P_\gamma(|z|)|\psi_{1(n)}(z)||(v_n \cdot e^{-rt})^{(\beta)}(z)| \ | \gamma|,|\beta| \leq s; \ \gamma \neq 0; \ z \in K_\mu \cap \mathbb{C}^N\} \leq$$

$$\leq C_o(s,n)\ \sup\left\{\left|\left(v_n\cdot e^{-\rho_n t}\right)^{(\beta)}(z)\right| \mid |\beta|\leq s;\ z\in K_\mu\cap\mathbb{C}^N\right\}\ .$$

Bezeichnet man die charakteristische Funktion von $K_{\mu+1}\cap\mathbb{C}^N$ mit $\chi_{\mu+1}$, so gilt nach Wahl der ρ_n und wegen 2.6 für jedes $\beta\in\mathbb{N}_o^{2N}$

$$\chi_{\mu+1}\left(v_n\cdot e^{-\rho_n t}\right)^{(\beta)} = \chi_{\mu+1}\left((u_{n-1}-u_n)\cdot e^{-\rho_n t}\right)^{(\beta)} \in L^2_{q-1}(V\cap\mathbb{C}^N)\ .$$

Wegen (2.2.2) kann man daher für jedes $n\geq 3$ die natürliche Zahl $l(n)$ so groß wählen, daß zusätzlich die beiden folgenden Ungleichungen gelten:

$$l(n)\ \geq\ n^2\cdot C_o(n+N,n)\cdot[A(n+N,\rho_n,f_{n-1},n+1)+A(n+N,\rho_n,f_n,n+1)]$$

$$\sup\left\{\left\|\chi_{\mu+1}(1-\psi_{l(n)})\left(v_n\cdot e^{-\rho_n t}\right)^{(\beta)}\right\|_{L^2}\cdot B\left(\frac{\rho-\rho_n}{2},|\beta|\right) \mid |\beta|\leq|\alpha|+N+1\right\}\ \leq\ n^{-2}.$$

Setzt man $s_\alpha := |\alpha|+N+1$, und schätzt man zunächst jeden Summanden $|(v_n-h_n)^{(\alpha)}(z)|e^{-rt(z)}$ wie in (2.7.1) und (2.7.2) ab, so erhält man für jedes $z\in K_{\mu,\nu}$, $\nu\geq\nu_o$, sowie für jedes $m\geq\mu$:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}(v_n-h_n)^{(\alpha)}(z)\right|e^{-rt(z)}$$

$$\leq C_1(|\alpha|,r,\mu)\cdot\sum_{n=m+1}^{m+p}\sup_{|\beta|\leq s_\alpha}\left\|\chi_{\mu+1}\left((1-\psi_{l(n)})v_n\cdot e^{-\rho t}\right)^{(\beta)}\right\|_{L^2}\leq$$

$$\leq C_1\sum_{n=m+1}^{m+p}\sup_{|\beta|\leq s_\alpha}2^{c_\beta-1}\left[\sum_{0<\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\left\|\chi_{\mu+1}(1-\psi_{l(n)})^{(\gamma)}(v_n\cdot e^{-\rho t})^{(\beta-\gamma)}\right\|_{L^2}+\right.$$

$$\left.+\left\|\chi_{\mu+1}(1-\psi_{l(n)})(v_n\cdot e^{-\rho t})^{(\beta)}\right\|_{L^2}\right]\leq$$

$$\leq C_2\sum_{n=m+1}^{m+p}\left[\frac{1}{l(n)}\cdot\sup\left\{\left\|\chi_{\mu+1}\cdot P_\gamma\cdot\psi_{l(n)}\left(v_n\cdot e^{-\rho_n t}\right)^{(\beta)}\right\|_{L^2} \mid |\beta|,|\gamma|\leq s_\alpha;\gamma\neq 0\right\}+\right.$$

$$\left.+\sup_{|\beta|\leq s_\alpha}B\left(\frac{\rho-\rho_n}{2},|\beta|\right)\left\|\chi_{\mu+1}(1-\psi_{l(n)})\left(v_n\cdot e^{-\rho_n t}\right)^{(\beta)}\right\|_{L^2}\leq\right.$$

$$\leq C_2\sum_{n=m+1}^{m+p}\frac{1}{l(n)}C_o(n+N,n)\ \sup\left\{\left\|\chi_{\mu+1}\ v_n\cdot e^{-\rho_n t}\right\|^{(\beta)}_{L^2} \mid |\beta|\leq s_\alpha\right\}+\frac{1}{n^2}\leq$$

$$\leq 2\,C_2(|\alpha|,r,\mu)\cdot\sum_{n=m+1}^{m+p}n^{-2}\ \xrightarrow{m\to\infty}\ 0$$

unabhängig von $\nu,p\in\mathbb{N}$.

4) Es gilt $g \in \tilde{\mathcal{E}}_{q-1}(V)$.

Sind $\mu \in \mathbb{N}$, $r > 0$ und $\alpha \in \mathbb{N}_o^{2N}$ beliebig gewählt, so wähle man $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \max\{3, |\alpha|, 1 + \frac{1}{r}, \mu\}$. Damit gelten $r > \frac{1}{m-1}$ sowie für $n \geq m+1$ $|\alpha| + N \leq n + N + 1$, so daß aus dem eben Gezeigten $\sup\{|g^{(\alpha)}(z)| e^{-rt(z)} \mid z \in K_\mu \cap \mathbb{C}^N\} < \infty$ folgt. Da man t gegen die Betragsfunktion abschätzen kann, impliziert dies die Behauptung. •

2.8 Korollar. Die Sequenz

$$(2.8.1) \qquad 0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}} \xrightarrow{i} \tilde{\mathcal{E}}_0 \xrightarrow{\bar{\partial}_0} \tilde{\mathcal{E}}_1 \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_{N-1}} \tilde{\mathcal{E}}_N \xrightarrow{\bar{\partial}_N} 0$$

ist eine Auflösung der Garbe $\tilde{\mathcal{O}}$.

Beweis. Die Exaktheit obiger Sequenz an der Stelle $\tilde{\mathcal{E}}_0$ folgt unmittelbar aus der Definition der Holomorphie in mehreren Variablen. Sei daher $1 \leq q \leq N$ beliebig. Ferner seien $w \in Z_N$ und $f_w \in \tilde{\mathcal{E}}_{q,w}$ ein Keim in w mit $\bar{\partial}_q(f_w) = 0$. Falls $w \in \mathbb{C}^N$, so ergibt sich die Exaktheit an der Stelle $\tilde{\mathcal{E}}_q$ aus Hörmander [13], 2.3.3. Sei also $w \in Z_N \cap \mathbb{C}^N$. Dazu wähle man einen Repräsentanten $f \in \tilde{\mathcal{E}}_q(U)$ von f_w auf einer offenen Umgebung U von w in Z_N mit $\bar{\partial}_q(f) = 0$. Nach Kawai [18], 2.1.6 existiert eine $\tilde{\mathcal{O}}$-pseudokonvexe Umgebung V von w, die relativ kompakt in U enthalten ist. Da die Funktion $\exp \circ (H + \Phi)$ auf $V \cap \mathbb{C}^N$ nur wie ein Polynom wächst, zeigt man wie in 2.5, daß $f \in \tilde{\mathcal{E}}_q(V) \cap X_q$ gilt. Damit liefert 2.7 die Exaktheit an der Stelle $\tilde{\mathcal{E}}_q$. •

Im nächsten Paragraphen sollen mit Hilfe der Auflösung (2.8.1) Kohomologiegruppen von V, $V \subset Z_N$ offen, mit Koeffizienten in der Garbe $\tilde{\mathcal{O}}$ berechnet werden. Daher ist nach Kultze [23], 18.10 zu zeigen, daß die Garben $\tilde{\mathcal{E}}_q$, $0 \leq q \leq N$, azyklisch sind. Da eine abgeschlossene Teilmenge eines parakompakten Raumes parakompakt ist (Schubert [35], I.8.5, Satz 1), genügt es daher nach [23], 18.8, die Weichheit der Garben $\tilde{\mathcal{E}}_q$, $0 \leq q \leq N$, zu zeigen.

2.9 Lemma. Für alle $q \in \mathbb{N}_o$ mit $q \leq N$ ist die Garbe $\tilde{\mathcal{E}}_q$ weich.

Beweis. Seien $0 \leq q \leq N$ sowie eine abgeschlossene Teilmenge A

von Z_N beliebig gewählt. Nach [23], 13.1 kann man jeden Schnitt f in $\mathcal{E}'_q$ über A auf eine offene Umgebung V von A fortsetzen, d.h. es existiert ein $f_o \in \mathcal{E}'_q(V)$ mit $f_{o|A} = f$. Außerdem kann man eine auf $V \cap \mathbb{C}^N$ stetige Funktion φ_o mit $0 \leq \varphi_o \leq 1$ und ein positives ε so wählen, daß die C^∞-Funktion $\varphi := \varphi_o * \rho_\varepsilon$ auf einer Umgebung von $A \cap \mathbb{C}^N$ gleich 1 ist und ihren Träger in $V \cap \mathbb{C}^N$ hat. Ferner sind alle Ableitungen von φ auf $V \cap \mathbb{C}^N$ beschränkt. Daher gilt $\varphi \cdot f_o \in \mathcal{E}'_q(Z_N)$. Offenbar ist dieser Schnitt eine Fortsetzung von f auf Z_N, was die Weichheit von $\mathcal{E}'_q$ beweist. •

Added in proof. Nach Fertigstellung dieser Arbeit erfuhr ich, daß Ito [42] und Nagamachi [43] ebenfalls die Dolbeault-Auflösung von $\mathcal{C}$ zur Untersuchung der Garbe der Fourierhyperfunktionen mit Werten in einem Fréchet-Raum benutzt haben. In [43] werden zum Beweis der Exaktheit der Sequenz (2.8.1) ähnliche Methoden wie in der vorliegenden Arbeit verwendet.

§ 3 Die Garbe $\mathcal{R}^E$

Zunächst wird in 3.1 die Garbe $\mathcal{R}^E$ der Fourierhyperfunktionen auf D_N mit Werten in einem Fréchet-Raum E eingeführt. Man beweist wichtige Eigenschaften dieser Garbe, indem man die im letzten Abschnitt eingeführte Garbe $\mathcal{B}^E$ als die E-wertige Garbe von $\mathcal{B}$ (s. Bierstedt et al. [3], 1.4) interpretiert. Beachtet man, daß das Verschwinden von Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in einer Garbe zur Exaktheit einer geeigneten Sequenz von Schnitträumen an einer Stelle äquivalent ist, so kann man dann mit Hilfe von Aussagen über topologische Tensorprodukte einige Resultate über die Garbe $\mathcal{B}$ auf die Garbe $\mathcal{B}^E$ und damit auch von der Garbe $\mathcal{R}$ der skalarwertigen Fourierhyperfunktionen auf die Garbe $\mathcal{R}^E$ übertragen (3.2, 3.3, 3.5 sowie 3.6). Am Ende dieses Paragraphen wird in 3.15 3) kurz erläutert, wie man die von Martineau [25] und Schapira [34] angegebene Konstruktion der Garbe $\mathcal{S}$ der Hyperfunktionen auf $\mathbb{R}^N$ modifizieren muß, um eine zu $\mathcal{R}^E$ isomorphe Garbe zu erhalten.

Bezeichnung. Sind X ein topologischer Raum, S eine Teilmenge von X und $\mathcal{G}$ eine Garbe abelscher Gruppen über X, so wird für $p \in \mathbb{N}_0$ die p-te Kohomologiegruppe von X mit Koeffizienten in $\mathcal{G}$ und Träger in S mit $H_S^p(X,\mathcal{G})$ bezeichnet. Sind $U \subset V \subset X$ offen mit $S \cap U \neq \emptyset$, so erhält man natürliche Einschränkungsabbildungen $r^*_{V,U}: H_{S\cap V}^p(V,\mathcal{G}) \longrightarrow H_{S\cap U}^p(U,\mathcal{G})$. Also ist $\{H_{S\cap V}^p(V,\mathcal{G}), r^*_{V,U}\}$ ein Garbendatum. Die hierzu assoziierte Garbe heißt *p-te abgeleitete Garbe von $\mathcal{G}$ mit Träger in* S. Man schreibt hierfür $\mathcal{H}_S^p(\mathcal{G})$ (vgl. Komatsu [20], p. 199).

3.1 Definition. Die Garbe $\mathcal{R}^E$ der *Fourierhyperfunktionen auf* D_N *mit Werten in dem Fréchet-Raum* E wird als Einschränkung der Garbe $\mathcal{H}_{D_N}^N(\mathcal{B}^E)$ auf D_N definiert.

3.2 Satz. Die Sequenz

$$(3.2.1) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{B}^E \xrightarrow{j} \mathcal{E}_0^E \xrightarrow{\partial_0^E} \mathcal{E}_1^E \xrightarrow{\partial_1^E} \cdots \xrightarrow{\partial_{N-1}^E} \mathcal{E}_N^E \xrightarrow{\partial_N} 0$$

ist eine weiche Auflösung der Garbe $\mathcal{B}^E$.

Beweis. Die Exaktheit der Sequenz an der 0-ten Stelle ergibt sich aus der Definition der Holomorphie vektorwertiger Funktionen mehrerer Veränderlicher.
Sei also für ein $q \in \mathbb{N}$ mit $q \leq N$ $f_w \in \hat{\mathcal{E}}^{\mathcal{O}E}_{q,w}$ ein Keim in einem beliebigen Punkt $w \in Z_N$ mit $\bar{\partial}_q(f_w) = 0$. Dazu wähle man eine $\mathcal{O}$-pseudokonvexe Umgebung V von w sowie einen Repräsentanten $f \in \hat{\mathcal{E}}^{\mathcal{O}E}_q(V)$ von f_w mit $\bar{\partial}_q(f) = 0$ auf $V \cap \mathbb{C}^N$.
Nach Kawai [18], 2.1.4 gilt für alle $p \in \mathbb{N}$ $H^p(V,\mathcal{O}) = 0$. Dies impliziert nach 2.8, 2.9 und Kultze [23], 18.10 die Exaktheit der Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \hat{\mathcal{E}}^{\mathcal{O}}_{p-1}(V) \xrightarrow{\bar{\partial}_{p-1}} \hat{\mathcal{E}}^{\mathcal{O}}_p(V) \xrightarrow{\bar{\partial}_p} \hat{\mathcal{E}}^{\mathcal{O}}_{p+1}(V) \longrightarrow \cdots$$

an der p-ten Stelle, $p \in \mathbb{N}$. Wegen $N(\bar{\partial}_{p+1}) = R(\bar{\partial}_p)$ ist das Bild von $\bar{\partial}_p$ insbesondere ein abgeschlossener Unterraum von $\hat{\mathcal{E}}^{\mathcal{O}}_{p+1}(V)$ und somit nach 1.4 sowie 1.6 ein nuklearer Fréchet-Raum. Daher ist folgende kurze Sequenz von (FN)-Räumen topologisch exakt

$$0 \longrightarrow R(\bar{\partial}_{q-1}) \longrightarrow \hat{\mathcal{E}}^{\mathcal{O}}_q(V) \xrightarrow{\bar{\partial}_q} R(\bar{\partial}_q) \xrightarrow{\bar{\partial}_{q+1}} 0 \ .$$

Tensoriert man diese Sequenz mit dem Fréchet-Raum E, so bleibt die Exaktheit nach Grothendieck [11], p. 4 erhalten. Beachtet man, daß die Garben $\hat{\mathcal{E}}^E_p$, $p \in \mathbb{N}_0$, nach 1.7 und Grothendieck [12], Chap. II, § 2, n° 1, Théorème 6 genau die E-wertigen Garben von $\hat{\mathcal{E}}^{\mathcal{O}}_p$ sind, so erhält man:

$$N(\bar{\partial}^E_q) = N(\bar{\partial}_q \varepsilon \mathrm{id}_E) \simeq N(\bar{\partial}_q \hat{\otimes} \mathrm{id}_E) \simeq N(\bar{\partial}_q) \hat{\otimes}_\pi E \simeq R(\bar{\partial}_{q-1}) \hat{\otimes}_\pi E \simeq$$
$$\simeq R(\bar{\partial}_{q-1} \hat{\otimes} \mathrm{id}_E) \simeq R(\bar{\partial}_{q-1} \varepsilon \mathrm{id}_E) = R(\bar{\partial}^E_{q-1}) \ ,$$

was die Exaktheit von (3.2.1) an der Stelle $\hat{\mathcal{E}}^{\mathcal{O}E}_q$ für jedes $1 \leq q \leq N$ liefert. Die Weichheit der Garben $\hat{\mathcal{E}}^{\mathcal{O}E}_q$ beweist man wie in 2.9. •

Bemerkungen. 1) Wie oben zeigt man, daß $\mathcal{O}^E$ die E-wertige Garbe von $\mathcal{O}$ ist.

2) Der Beweis zu 3.2 enthält zugleich für die Garbe $\mathcal{O}^E$ das Analogon zu Cartan's Theorem B (s. Hörmander [13], 7.4.3). Denn aus

$N(\bar{\partial}^E_q) = R(\bar{\partial}^E_{q-1})$, $1 \leq q \leq N$, folgt $H^q(V, \mathcal{O}^E) = 0$ für diese natürlichen Zahlen q und jede $\mathcal{O}$-pseudokonvexe Teilmenge V von Z_N. Da die Auflösung (3.2.1) die Länge N hat, gilt somit für alle $q \in \mathbb{N}$ $H^q(V, \mathcal{O}^E) = 0$.

Der folgende Satz beinhaltet das Analogon zu dem Resultat von Malgrange [24], Lemme 3, das im Falle der Garbe $\mathcal{C}$ unmittelbar aus der Elliptizität des Laplace-Operators folgt.

3.3 Satz. Für jede offene Teilmenge V von Z_N gilt $H^N(V, \mathcal{C}^E) = 0$.

Beweis. Nach Kawai [18], 3.1.8 gilt die Behauptung im Fall $E = \mathbb{C}$, d.h. $\bar{\partial}_{N-1}: \mathcal{E}_{N-1}(V) \to \mathcal{E}_N(V)$ ist surjektiv und damit nach dem Satz von der offenen Abbildung ein topologischer Homomorphismus. Aus Grothendieck [12], Chap.I, § 1, n° 2, Prop. 3.1) folgt dann, daß $\bar{\partial}_{N-1} \hat{\otimes} id_E: \mathcal{E}_{N-1}(V) \hat{\otimes}_\pi E \to \mathcal{E}_N(V) \hat{\otimes}_\pi E$ ebenfalls surjektiv ist.

Bezeichnung. Man sagt, eine Garbe $\mathcal{G}$ über dem topologischen Raum X ist von *welker Dimension* $\leq m$, für ein $m \in \mathbb{N}_0$, wenn $\mathcal{G}$ eine welke Auflösung der Länge m besitzt. Abgekürzt schreibt man welke dim $\mathcal{G} \leq m$ (vgl. Komatsu [20], p. 196).

Aufgrund der in [20], Theorem 1.2(a) und (d) angegebenen Äquivalenz erhält man sofort aus 3.3

3.4 Folgerung. welke dim $\mathcal{O}^E \leq N$.

Im folgenden wird für die Garbe $\mathcal{O}^E$ das Analogon zum Satz von Martineau ([25], p. 11) gezeigt, ohne jedoch eine der Serre-Dualität ([37], § 10) ähnliche Aussage zu beweisen.

Dazu beachte man zunächst, daß nach Kawai [18], p. 478 für alle $p \in \mathbb{N}_0$ und alle $W \subset Z_N$ offen $H^p(W, \mathcal{O})$ mit Hilfe der Schnittsequenz

$$\mathcal{O}(W) \longrightarrow X_0(W) \xrightarrow{\bar{\partial}_0} X_1(W) \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_{N-1}} X_N(W) \xrightarrow{\bar{\partial}_N} 0$$

berechnet werden kann. Dabei ist für $0 \leq p \leq N$ und eine beliebige kompakte Ausschöpfung $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von W

$$X_p(W) := \operatorname{proj}_{+j} L^2_p(K_j \cap \mathbb{C}^N, \tfrac{1}{j}t) \ .$$

Außerdem seien die $\overline{\partial}$-Operatoren im distributionellen Sinn erklärt.

Da zunächst eine Künneth-Formel (vgl. Grothendieck [11]) bewiesen wird, müssen die Kohomologiegruppen $H^p(W,\mathcal{O})$ und $H^p(W,\mathcal{O}^E)$ geeignet topologisiert werden. Dazu seien für alle $p \in \mathbb{N}_o$ folgende Bezeichnungen eingeführt:

1) $\overline{\partial}_{X,p}: X_p(W) \longrightarrow X_{p+1}(W)$ und $\overline{\partial}_{\tilde{\mathcal{E}},p}: \tilde{\mathcal{E}}_p(W) \longrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{p+1}(W)$ seien die jeweiligen $\overline{\partial}$-Operatoren.

2) $\pi_{X,p}: N(\overline{\partial}_{X,p}) \longrightarrow H^p(W,\mathcal{O})$ und $\pi_{\tilde{\mathcal{E}},p}: N(\overline{\partial}_{\tilde{\mathcal{E}},p}) \longrightarrow H^p(W,\mathcal{O})$ bezeichnen für $p = 0$ die identischen Abbildungen sowie im Fall $p \geq 1$ die Quotientenabbildungen.

3) Die jeweiligen Relativ- oder Quotiententopologien auf $H^p(W,\mathcal{O})$ werden mit $\tau_{X,p}$ bzw. $\tau_{\tilde{\mathcal{E}},p}$ abgekürzt.

4) Entsprechend steht τ^E_p für die Relativ- oder Quotiententopologie auf $H^p(W,\mathcal{O}^E)$.

3.5 Lemma. Sei $0 \leq p \leq N$. Ist $\tau_{X,p}$ separiert, so gelten

1) $\tau_{\tilde{\mathcal{E}},p} = \tau_{X,p}$, insbesondere ist dann auch $\tau_{\tilde{\mathcal{E}},p}$ separiert.

2) $H^p(W,\mathcal{O}^E)$ ist topologisch isomorph zu $H^p(W,\mathcal{O}) \hat{\otimes}_\pi E$.

Beweis. a) Sei zunächst $p = 0$. Nach Definition der 0-ten Kohomologiegruppe gilt $H^0(W,\mathcal{O}) = \mathcal{O}(W)$. In 1.4 1) wurde gezeigt, daß $\tau_{\tilde{\mathcal{E}},0}$ mit der natürlichen Topologie τ auf $\mathcal{O}(W)$ übereinstimmt. Aus 2.5 folgt dann, daß $(\mathcal{O}(W),\tau) \longrightarrow (\mathcal{O}(W),\tau_{X,0})$ bijektiv und stetig ist. Da $\tau_{X,0}$ eine (F)-Raum-Topologie ist, liefert der Satz von der offenen Abbildung bereits die Gleichheit von $\tau_{X,0}$ und $\tau_{\tilde{\mathcal{E}},0}$. Der zweite Teil der Behauptung erhält man daher aus 1.7, wenn man beachtet, daß man wie in 1.4 1) zeigen kann, daß τ^E_0 mit der natürlichen Topologie auf $\mathcal{O}(W,E)$ übereinstimmt.

b) Sei nun $1 \leq p \leq N$ beliebig. Wie in Teil 1) erhält man die Stetigkeit der Einbettung $i: \tilde{\mathcal{E}}_p(W) \to X_p(W)$ aus 2.5. Außerdem ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} N(\bar\partial_{X,p}) & \xrightarrow{\pi_{X,p}} & (H^p(W,\mathcal{O}),\tau_{X,p}) \\ i\uparrow & & \uparrow \mathrm{id} \\ N(\bar\partial_{\mathcal{E},p}) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{E},p}} & (H^p(W,\mathcal{O}),\tau_{\mathcal{E},p}) \end{array}$$

Nach Definition der Quotiententopologie gilt $\tau_{X,p} \leq \tau_{\mathcal{E},p}$ genau dann, wenn $\mathrm{id}\circ\pi_{\mathcal{E},p}$ stetig ist. Dies ist aber der Fall, da $\tau_{X,p}$ stetig ist. Also folgt aus der Separiertheit von $\tau_{X,p}$ die von $\tau_{\mathcal{E},p}$, d.h. $R(\bar\partial_{\mathcal{E},p-1})$ ist in $\mathcal{E}_{p}(W)$ abgeschlossen. Da der Kern des $\bar\partial$-Operators in beiden Fällen abgeschlossen ist, sind $\tau_{X,p}$ und $\tau_{\mathcal{E},p}$ (F)-Raum-Topologien auf $H^p(W,\mathcal{O})$. Der Satz von der offenen Abbildung liefert daher den ersten Teil der Behauptung.

Die kurze Sequenz von (FN)-Räumen

$$0 \longrightarrow R(\bar\partial_{\mathcal{E},p-1}) \longrightarrow N(\bar\partial_{\mathcal{E},p}) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{E},p}} H^p(W,\mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

ist nach Wahl von $\tau_{\mathcal{E},p}$ topologisch exakt. Aus Grothendieck [11], p. 4 folgt dann auch Teil 2) der Behauptung:

$$H^p(W,\mathcal{O})\,\hat\otimes_\pi E \simeq (N(\bar\partial_{\mathcal{E},p})\,\hat\otimes_\pi E)/(R(\bar\partial_{\mathcal{E},p-1})\,\hat\otimes_\pi E)$$

$$\simeq N(\bar\partial_p^E)/R(\bar\partial_{p-1}^E) = H^p(W,\mathcal{O}^E) \qquad \bullet$$

Zu einer kompakten Teilmenge K von D_N sei eine offene Umgebung V in Z_N gewählt. Der Satz von Martineau für die Garbe $\mathcal{O}$ lautet:

$$H_K^q(V,\mathcal{O}) = 0, \text{ falls } q \neq N, \text{ und } H_K^N(V,\mathcal{O}) \simeq \mathcal{D}'_b(K)$$

(Kawai [18], 3.2.1).

Beim Beweis dieser Aussage folgert man aus [18], 2.6.1 mit Hilfe der Ausschneideeigenschaft (s. Komatsu [20], Theorem 1.1(i)), daß es genügt, eine $\mathcal{O}$-pseudokonvexe Menge V zu betrachten. Aus der langen exakten Kohomologiesequenz [20], Theorem 1.1(iii) resultieren dann wegen $H^p(V,\mathcal{O}) = 0$, $p \in \mathbb{N}$, folgende (algebraischen) Isomorphien:

$$H_K^1(V,\mathcal{O}) \simeq H^0(V\setminus K,\mathcal{O})/H^0(V,\mathcal{O}) \quad \text{sowie} \quad H_K^p(V,\mathcal{O}) \simeq H^{p-1}(V\setminus K,\mathcal{O}),\ p \geq 2.$$

Der weitere Beweis beruht auf einem Dualitätsschluß, der im vorliegenden Fall jedoch nicht zur Verfügung steht. Mit Hilfe von 3.5 wird das skalarwertige Resultat auf den vektorwertigen Fall übertragen.

3.6 Satz. K sei eine kompakte Teilmenge von D_N. Für eine beliebige offene Umgebung V von K in Z_N und für alle $q \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$H_K^q(V,\mathcal{O}^E) = \begin{cases} 0 & , q \neq N \\ \mathcal{E}'_b(K) \hat{\otimes}_\pi E & , q = N \end{cases} .$$

Beweis. Wie eben erläutert, zeigt man auch in diesem Fall, daß man sich auf die Betrachtung $\mathcal{O}$-pseudokonvexer Mengen V beschränken kann. Wegen $H^p(V,\mathcal{O}^E) = 0$, $p \in \mathbb{N}$, folgt dann

$$H_K^1(V,\mathcal{O}^E) \simeq {}^{H^0(V\setminus K,\mathcal{O}^E)}/_{H^0(V,\mathcal{O}^E)} \tag{3.6.1}$$

$$H_K^p(V,\mathcal{O}^E) \simeq H^{p-1}(V\setminus K,\mathcal{O}^E) \quad , \; p \geq 2. \tag{3.6.2}$$

Kawai zeigt in seinem Beweis zu 3.2.1, daß $R(\bar{\partial}_{X,p})$ in $X_{p+1}(V\setminus K)$ abgeschlossen ist. Daher ist $\tau_{X,p}$ für $1 \leq p \leq N$ separiert, was nach 3.5 die Behauptung für $q,N \geq 2$ impliziert.

Für $q = 1 < N$ und $E = \mathbb{C}$ gilt $0 = H_K^1(V,\mathcal{O}) \simeq {}^{\mathcal{O}(V\setminus K)}/_{\mathcal{O}(V)}$, d.h. $\mathcal{O}(V\setminus K) \simeq \mathcal{O}(V)$. Wegen (3.6.1) und 1.7 erhält man daher

$$H_K^1(V,\mathcal{O}^E) \simeq {}^{\mathcal{O}(V\setminus K)\,\hat{\otimes}_\pi E}/_{\mathcal{O}(V)\,\hat{\otimes}_\pi E} = 0 .$$

Ist $q = N = 1$, so ist aufgrund von Kawais Resultat folgende kurze Sequenz von (FN)-Räumen topologisch exakt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(V\setminus K) \longrightarrow \mathcal{E}'_b(K) \longrightarrow 0 .$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung durch Tensorierung mit E.

Beachtet man schließlich, daß es keine holomorphen Funktionen $\neq 0$ auf $V \cap \mathbb{C}^N$ gibt, deren Träger in $K \cap \mathbb{C}^N$ enthalten ist, so gilt stets $H_K^0(V,\mathcal{O}^E) = 0$, was den Beweis beendet. •

Bemerkung. Wie im Beweis zu 3.2 bemerkt wurde, gilt für jede natürliche Zahl p und jede $\mathcal{O}$-pseudokonvexe Teilmenge V von Z_N $H^p(V,\mathcal{O}^E) = 0$. Die Isomorphien in (3.6.1) und (3.6.2) liefern daher das sogenannte Hartogs-Phänomen für Kohomologiegruppen (s.

Friedman [7]):

$$H^p(V\setminus K,\mathcal{O}^E) \cong H^p(V,\mathcal{O}^E) \quad , \; p \in \mathbb{N}_0\setminus\{N-1,N\} \; .$$

Definition. Sei $\mathcal{G}$ eine Garbe abelscher Gruppen über dem topologischen Raum X. Eine Teilmenge S von X heißt *rein m-codimensional bez. der Garbe* $\mathcal{G}$, wenn für jedes $q \neq m$ $\mathcal{H}^q_S(\mathcal{G})$ die Nullgarbe ist (vgl. Komatsu [20], p. 205).

3.7 Satz. D_N ist rein N-codimensional bez. der Garbe $\mathcal{O}^E$.

Beweis. 1) Nach Definition der q-ten abgeleiteten Garbe von $\mathcal{O}^E$ genügt es zu zeigen, daß für jede offene Teilmenge V von Z_N und für alle $q \in \mathbb{N}_0\setminus\{N\}$ $H^q_{D_N\cap V}(V,\mathcal{O}^E) = 0$ gilt. Da $\mathcal{O}^E$ eine weiche Auflösung der Länge N besitzt, kann man sich auf die Fälle $0 \leq q \leq N-1$ beschränken. Sei also $V \subset Z_N$ offen beliebig gewählt. Mit K bzw. L sei der Abschluß bzw. der Rand von $U := V \cap D_N$ in D_N bezeichnet. Mit Hilfe der Ausschneideeigenschaft zeigt man leicht, daß $H^q_U(V,\mathcal{O}^E) = H^q_U(Z_N\setminus L,\mathcal{O}^E)$ für $0 \leq q \leq N$ gilt. Da K und L kompakte Teilmengen von D_N sind, erhält man aus der langen exakten Kohomologiesequenz

$$\begin{aligned}(3.7.1)\quad 0 \longrightarrow H^0_L(Z_N,\mathcal{O}^E) &\longrightarrow H^0_K(Z_N,\mathcal{O}^E) \longrightarrow H^0_U(Z_N\setminus U,\mathcal{O}^E) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^1_L(Z_N,\mathcal{O}^E) \longrightarrow H^1_K(Z_N,\mathcal{O}^E) \longrightarrow H^1_U(Z_N\setminus L,\mathcal{O}^E) \longrightarrow \cdots \\ &\longrightarrow H^N_L(Z_N,\mathcal{O}^E) \longrightarrow H^N_K(Z_N,\mathcal{O}^E) \longrightarrow H^N_U(Z_N\setminus L,\mathcal{O}^E) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

wegen 3.6 für alle $0 \leq q \leq N-2$ $H^q_U(Z_N\setminus L,\mathcal{O}^E) = 0$.

Im Fall $q = N-1$ erhält man unter Berücksichtigung des Beweises zu 3.6 die Exaktheit folgender Sequenz:

$$(3.7.2)\quad 0 \longrightarrow H^{N-1}_U(Z_N\setminus L,\mathcal{O}^E) \xrightarrow{\alpha} H^N_L(Z_N,\mathcal{O}) \hat{\otimes}_\pi E \xrightarrow{\beta\otimes id_E} H^N_K(Z_N,\mathcal{O}) \hat{\otimes}_\pi E \; .$$

2) Um nun das Verschwinden von $H^{N-1}_U(Z_N\setminus L,\mathcal{O}^E)$ zeigen zu können, bedarf es einer genauen Untersuchung der Abbildung β. Im folgenden wird gezeigt, daß β von der Transponierten der Einschränkungsabbildung $j: \mathcal{O}(K) \to \mathcal{O}(L)$ induziert wird. Dazu betrachte man folgendes Diagramm, dessen Kommutativität anschließend zel-

lenweise gezeigt wird:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{Q}(L)' & \xrightarrow{{}^{t}\tau_L} & H^1_*(V\setminus L,\mathcal{O})' & \xrightarrow{\gamma_L} & H^{N-1}(V\setminus L,\mathcal{O}) & \xrightarrow{\delta_L} & H^N_L(V,\mathcal{O}) \\
\uparrow{\scriptstyle t_j} & (1) & \uparrow{\scriptstyle {}^{t}\rho_1} & (2) & \uparrow{\scriptstyle \sigma_{N-1}} & (3) & \uparrow{\scriptstyle \beta} \\
\mathcal{Q}(K)' & \xrightarrow[{}^{t}\tau_K]{} & H^1_*(V\setminus K,\mathcal{Q})' & \xrightarrow[\gamma_K]{} & H^{N-1}(V\setminus K,\mathcal{O}) & \xrightarrow[\delta_K]{} & H^N_K(V,\mathcal{O})
\end{array}$$

(1): $\mathcal{Q}$ ist die Garbe der Keime schnell fallender holomorpher Funktionen auf V.

Sind X ein topologischer Raum, $A \subset X$ lokalabgeschlossen und $\mathcal{G}$ eine Garbe abelscher Gruppen über X, so bezeichnet man mit $\mathcal{G}_A$ die triviale Fortsetzung auf X der Einschränkung der Garbe $\mathcal{G}$ auf A. Daher sind im folgenden Diagramm alle Zellen kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{Q}_{V\setminus L} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathcal{Q}_L & \longrightarrow & 0 \\
 & & \rho\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle j} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{V\setminus K} & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{O}_K & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Da die Zeilen kurze exakte Sequenzen von Garben über V sind, gehören hierzu lange exakte Kohomologiesequenzen, deren verbindende Homomorphismen $\partial^j_Q\colon H^j(Q,\mathcal{Q}) \to H^{j+1}_*(V\setminus Q,\mathcal{Q})$, $Q = K,L$ und $j \in \mathbb{N}$, natürlich sind (Warner [40], 5.17), d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(L) & \xrightarrow{\cong} & H^0(L,\mathcal{O}) & \xrightarrow{\partial^0_L} & H^1_*(V\setminus L,\mathcal{O}) \\
j\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \rho_1} \\
\mathcal{O}(K) & \longrightarrow & H^0(K,\mathcal{O}) & \xrightarrow[\partial^0_K]{} & H^1_*(V\setminus K,\mathcal{O})
\end{array}$$

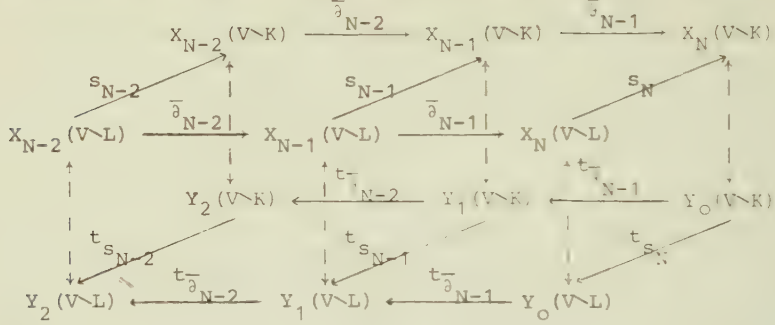
ist kommutativ. Nach [18], p. 481 ist ∂^0_Q, $Q = K,L$, ein Isomorphismus, so daß mit $\tau_Q := \partial^{0\,-1}_Q$ die Kommutativität von (1) durch Transponieren folgt.

(2): Sei $W \subset Z_N$ offen. Ferner sei $X_q(W)$ wie im Anschluß an 3.4 definiert. Nach [18], p. 478 gilt dann für $Q = K,L$:

$$H^1_*(V\setminus Q,\mathcal{Q}) \simeq {}^{N({}^{t}\bar{\partial}_{X,N-2})}\big/_{R({}^{t}\bar{\partial}_{X,N-1})} \quad \text{bzw.} \quad H^{N-1}(V\setminus Q,\mathcal{O}) \simeq {}^{N(\bar{\partial}_{X,N-1})}\big/_{R(\bar{\partial}_{X,N-2})}$$

Im nächsten Diagramm bilden übereinanderliegende Räume jeweils

ein duales Paar, und der Boden sowie der Deckel sind kommutativ:



Der aus der Serre-Dualität [18], 3.1.7 stammende Isomorphismus γ_Q, $Q = K,L$, kommutiert daher mit den von s_{N-1} und ${}^t s_{N-1}$ induzierten Abbildungen σ_{N-1} und ${}^t\rho_1$.

(3): Die lange exakte Kohomologiesequenz [18], p. 480 Mitte wird durch die kurze exakte Garbensequenz über V

$$0 \to \mathcal{J}_K \to \mathcal{J} \to \mathcal{J}_{V\setminus K} \to 0$$

induziert. Wie bei (1) folgt dann, daß der verbindende Homomorphismus $\tau_Q: H^{N-1}(V\setminus Q, \mathcal{J}) \to H^N_Q(V,\mathcal{J})$, $Q = K,L$, natürlich ist, was schließlich die Kommutativität der dritten Zelle beweist.

3) Nach 1.12 hat die Einschränkungsabbildung γ dichtes Bild, so daß die transponierte Abbildung ${}^t\gamma: \mathcal{O}'_b(L) \to \mathcal{O}'_b(K)$ injektiv ist. Aufgrund der Vorüberlegung und der Nuklearität von $\mathcal{O}'_b(Q)$, $Q = K,L$, ist daher $\beta \otimes id_E$ ebenfalls injektiv. Also gilt $0 = N(\beta \hat{\otimes} id_E) = R(\alpha)$. Da α injektiv ist, erhält man die Behauptung auch für $q = N-1$. •

3.8 Folgerung. Die Prägarbe $\{H^N_{V\cap D_N}(V,\mathcal{J}^E), r^*_{V,U}\}_{V\subset Z_N}$ offen ist die welke Garbe R^E.

Beweis. Da D_N rein N-codimensional bez. der Garbe $\mathcal{J}^E$ ist, folgt aus Komatsu [20], Th. 1.8 für alle $p \in \mathbf{N}_0$ und jede Trägerfamilie ϕ in Z_N $H^p_\phi(Z_N, \mathcal{H}^N_{D_N}(\mathcal{J}^E)) = H^{N+p}_{\phi\, D_N}(Z_N,\mathcal{J}^E)$, d.h. insbesondere, daß

das angegebene Garbendatum eine Garbe ist. Aus 3.4 erhält man mit der Charakterisierung der welken Dimension in [20], Theorem 1.2 welke dim $\mathcal{H}^N_{D_N}(\mathcal{O}^E) \leq 0$, was äquivalent zur Welkheit der Garbe $\mathcal{H}^N_{D_N}(\mathcal{O}^E)$ ist. Da diese Garbe ihren Träger in D_N hat, ist nach Definition dann auch $\mathcal{R}^E$ welk. •

Bemerkung. Ein anderer Beweis der Welkheit von $\mathcal{R}^E$ beruht auf der Exaktheit der Sequenz (3.7.1). Ist U eine echte, offene Teilmenge von D_N und sind K und L wie in 3.7 definiert, so ist

$$H^N_K(Z_N,\mathcal{O}^E) \longrightarrow H^N_U(Z_N\setminus L,\mathcal{O}^E) \longrightarrow 0$$

exakt. Nach Definition von $\mathcal{R}^E$ und dem ersten Teil des Beweises zu 3.8 ist daher die Einschränkungsabbildung $\Gamma_K(D_N,\mathcal{R}^E) \to \Gamma(U,\mathcal{R}^E)$ surjektiv. Das Zornsche Lemma liefert zusammen mit dem Resultat in Kultze [23], 13.1 die Welkheit der Garbe $\mathcal{R}^E$.

3.9 Satz. Für jede kompakte Teilmenge K von D_N gilt

$$\Gamma_K(D_N,\mathcal{R}^E) = \mathcal{O}'_b(K)\,\hat{\otimes}_\pi E \simeq L_b(\mathcal{Q}(K),E) .$$

Beweis. Nach 3.6 und Definition von $\mathcal{R}^E$ gilt die erste Gleichung. Wegen 1.11 ist $\mathcal{Q}(K)$ reflexiv und tonneliert sowie sein starker Dualraum Montelsch. Daher gilt aufgrund der Nuklearität dieser Räume nach Grothendieck [12], Chap. II, § 2, n° 1, Théorème 6 und Floret;Wloka [6], § 10, 2.3:

$$\mathcal{Q}'_b(K)\,\hat{\otimes}_\pi E \simeq E\,\hat{\otimes}_\pi \mathcal{Q}'_b(K) \simeq L_e((\mathcal{Q}'_b(K))'_c,E) \simeq L_e((\mathcal{Q}'_b(K))'_b,E) \simeq$$

$$\simeq L_e(\mathcal{Q}(K),E) \simeq L_b(\mathcal{Q}(K),E) .$$ •

3.10 Bemerkung. Während man durch die in 3.9 angegebenen Isomorphien $\Gamma_K(D_N,\mathcal{R}^E)$, $K \subset D_N$ kompakt, zu einem Fréchet-Raum machen kann, ist es nicht möglich für offene Teilmenge U von D_N, $U \neq D_N$, den Schnittraum $\mathcal{R}(U,E) := \Gamma(U,\mathcal{R}^E)$ auf die sich anbietende natürliche Weise zu topologisieren. Aus der Exaktheit der Sequenz (3.7.1) folgt zwar (vgl. Schapira [34], p. 52)

$$(3.10.1)\quad \mathcal{R}(U,E) \simeq \Gamma_K(D_N,\mathcal{R}^E) \,/\, \Gamma_L(D_N,\mathcal{R}^E) \simeq \mathcal{Q}'_b(K)\,\hat{\otimes}_\pi E \,/\, \mathcal{Q}'_b(L)\,\otimes_\pi E ,$$

doch kann man wegen der Dichtheit von $\mathcal{Q}'(L) \otimes E$ in $\mathcal{Q}'_b(K) \hat{\otimes}_\varepsilon E$ $R(U,E)$ nicht mit der Quotiententopologie versehen, und dadurch R^E zu einer topologischen Garbe machen (s. Bierstedt et al. [3], 1.1). Denn dann wäre die Abbildung

$$f: L_b(\mathcal{Q}(K),E) \longrightarrow R(D_N,E) \longrightarrow R(U,E)$$

stetig und hätte den abgeschlossenen Kern $N(f) = L(\mathcal{Q}(L),E)$. Zum Beweis der angegebenen Dichtheit wähle man ein beliebiges $f \in (\mathcal{Q}'_b(K))' = \mathcal{Q}(K)$ mit $f_{|\mathcal{Q}'(L)} = 0$. Faßt man also f als Element von $\mathcal{Q}(L)$ auf, so gilt für jedes $g \in \mathcal{Q}'(L)$ $\langle f,g\rangle = 0$. Daher muß f auf einer in Z_N offenen Umgebung W von L verschwinden. Da W jede Komponente von K trifft, gilt bereits $f = 0$ auf einer Umgebung von K, d.h. $f = 0$ in $\mathcal{Q}(K)$. Aus dem Satz von Hahn-Banach folgt somit die Dichtheit von $\mathcal{Q}'(L)$ in $\mathcal{Q}'_b(K)$. Der Beweis zu Grothendieck [12], Chap. I, § 1, n° 2, Prop. 3.1) liefert die oben behauptete Dichtheit.

3.11 Satz. Seien K_i, $1 \le i \le n$, kompakte Teilmengen von D_N. Ferner sei $K := \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Dann existieren zu jedem $F \in \Gamma_K(D_N,R^E)$ Elemente F_i von $\Gamma_{K_i}(D_N,R^E)$, $1 \le i \le n$, mit $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Abbildung

$$T: \prod_{i=1}^{n} \mathcal{Q}'_b(K_i) \to \mathcal{Q}'_b(K),\ T(f_1,\dots,f_n) := \sum_{i=1}^{n} f_i,$$

ein surjektiver topologischer Homomorphismus ist. Denn dann ist nach Grothendieck [12], Chap. I, § 1, n° 2, Proposition 3.1) die Abbildung $T \otimes id_E$ insbesondere surjektiv, was mit 3.9 die Behauptung impliziert.
Man erhält T als Transponierte der Abbildung

$$S: \mathcal{Q}(K) \to \prod_{i=1}^{n} \mathcal{Q}(K_i),\ S(f) := (f_{|K_i})_{1 \le i \le n}.$$

Nach Treves [39], Theorem 37.2 und dem Satz von der offenen Abbildung ist daher T genau dann surjektiv und topologisch, wenn S injektiv ist und schwach abgeschlossenes Bild hat. Dies folgt jedoch aus dem Baernstein-Lemma (Baernstein [1], p. 29).
Sei dazu B eine beschränkte Teilmenge von $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{Q}(K_i)$.

$\bigotimes_{i=1}^{n} \operatorname{ind}_{m\to} \mathcal{Q}(U_{i,m}) \simeq \operatorname{ind}_{m\to} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{Q}(U_{i,m})$, wobei für $1 \le i \le n$ $(U_{i,m})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Umgebungen von K_i sei, die den Voraussetzungen von 1.8 genügt. Aufgrund der Regularität eines endlichen Produktes von (DFS)-Räumen existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so daß B in der m-ten Stufe $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{Q}(U_{i,m})$ enthalten und dort beschränkt ist. Dann ist auch $S^{-1}(B)$ in $\mathcal{O}(K)$ beschränkt. Denn durch $U_m := \bigcup_{i=1}^{n} U_{i,m}$, $m \in \mathbb{N}$, wird eine Fundamentalfolge offener Umgebungen von K definiert. Ist $Q \subset U_m$ kompakt, so wähle man endlich viele Punkte $z_1,\dots,z_q$ in Z_N und positive Zahlen $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q$, so daß $U_{\varepsilon_j}(z_j) := \{w \in Z_N \mid \rho(z_j,w) < \varepsilon_j\}$ und $Q \subset \bigcup_{j=1}^{q} \overline{U_{\frac{1}{2}\varepsilon_j}(z_j)}$ gelten, wobei ρ die Metrik auf Z_N bezeichne. Daher wird Q durch die in $U_{i,m}$, $1 \le i \le n$, kompakten Mengen $Q_i := \bigcup \{\overline{U_{\frac{1}{2}\varepsilon_j}(z_j)} \mid z_j \in U_{i,m};\ 1 \le j \le q\}$ überdeckt. Da nach Wahl von U_m jedes $f \in S^{-1}(B)$ auf $U_m \cap \mathbb{C}^N$ definiert werden kann, folgt für jedes $p \in \mathbb{N}$ mit $p \ge 2$

$$\sup\{|f(z)|\exp[\tfrac{1}{m}(1-\tfrac{1}{p})|z|] \mid z \in Q \cap \mathbb{C}^N;\ f \in S^{-1}(B)\}$$

$$\le \max_{i=1}^{n} \sup\{|g(z)|\exp[\tfrac{1}{m}(1-\tfrac{1}{p})|z|] \mid z \in Q_i \cap \mathbb{C}^N;\ g \in B\} < \infty ,$$

was die Beschränktheit von $S^{-1}(B)$ in $\mathcal{O}(K)$ liefert. Beachtet man, daß $\mathcal{Q}(K)$ ein Montel-Raum ist, so ist daher S nach dem Baernstein-Lemma ein injektiver topologischer Homomorphismus. Da $\mathcal{O}(K)$ und $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{Q}(K_i)$ insbesondere vollständig sind, hat S auch abgeschlossenen Bildbereich. •

Der Satz von Leray (Komatsu [20], Theorem 1.10) liefert die Darstellung einer E-wertigen Fourierhyperfunktion durch Randwerte langsam wachsender holomorpher Funktionen mit Werten in E. Sei dazu $U \subset D_N$ offen und V_o eine $\mathcal{H}$-pseudokonvexe Umgebung von U in Z_N mit $U = V_o \cap D_N$. Ferner sei $V_j := \{z \in V_o \mid \operatorname{Im}(z) \neq 0\}$ für $1 \le j \le N$. Die Menge V_j sind ebenfalls $\mathcal{H}$-pseudokonvex (vgl. Junker [17], Kap. II, 2.8 2)). Bezeichnet man die Überdeckungen

$\{V_j \mid 0 \le j \le N\}$ von V_0 bzw. $\{V_j \mid 1 \le j \le N\}$ von $V_0 \setminus U$ mit $\mathfrak{V}$ bzw. $\mathfrak{V}'$, und setzt man zur Abkürzung $V_0 \# D_N := \bigcap_{j=0}^{N} V_j$ sowie für $1 \le i \le N$ $\hat{V}_i := \cap\{V_j \mid 0 \le j \le N;\ j \ne i\}$, so gilt

3.12 Satz. $R(U,E) \cong H^N(\mathfrak{V},\mathfrak{V}',\partial^E) \cong \partial(V_0 \# D_N, E) \Big/ \bigoplus_{i=1}^{N} \partial(\hat{V}_i, E)$.

Beweis. Da endliche Durchschnitte $\tilde{\partial}$-pseudokonvexer Mengen ebenfalls diese Eigenschaft besitzen, sind nach der Bemerkung im Anschluß an 3.2 die Voraussetzungen des Satzes von Leray erfüllt, d.h. es gilt

$$H^N(\mathfrak{V},\mathfrak{V}',\partial^E) \cong H^N_U(V_0,\partial^E) \cong R(U,E) .$$

Die zweite Isomorphie folgt unmittelbar aus der Definition der N-ten relativen Čechschen Kohomologiegruppe $H^N(\mathfrak{V},\mathfrak{V}',\partial^E)$. •

Ist $U = D_N$, so wähle man $V_0 = D_N \times i(-1,1)^N$. Stellt man aufgrund der eben angegebene Isomorphie $G \in R(D_N,E)$ mit Hilfe einer definierenden Funktion g dar, so schreibt man hierfür

$$G = [g] = [(g_1,\dots,g_{2^N})] ,$$

wobei g_i eine langsam wachsende, E-wertige holomorphe Funktion auf der i-ten Zusammenhangskomponente von $V_0 \# D_N$ ist, $1 \le i \le 2^N$.

In [17], Kap. III, 3.10 wurde wie im Fall $E = \mathbb{C}$ (s. Kawai [18], 3.2.9) folgendes Analogon zur Köthe-Dualität (Köthe [21], Sätze 6 und 7) bewiesen

3.13 Satz. Die Abbildung $A: H^N(\mathfrak{V},\mathfrak{V}',\partial^E) \to L(\mathcal{Q}(D_N),E)$ mit

$$A[g](f) := -\sum_{j=1}^{2^N} \Big(\prod_{k=1}^{N} \operatorname{sgn} \varepsilon_{j,k}\Big) \int_{\mathbb{R}^N} (g_j \cdot f)(x + i\varepsilon_j)\, dm_N(x)$$

ist ein Isomorphismus. Dabei gilt für alle $1 \le k \le N$ und alle $1 \le j \le 2^N$ $0 < |\varepsilon_{j,k}| < 1$, so daß g_j und $f \in \mathcal{Q}(D_N)$ in allen Punkten $x + i\varepsilon_{j,k}$, $x \in \mathbb{R}^N$, definiert sind.

Da nach [18], 3.2.4 die Fouriertransformation $\hat{}$ auf $\mathcal{Q}(D_N)$ ein

topologischer Isomorphismus ist, erhält man ferner

3.14 Folgerung. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: \mathcal{R}(D_N,E) \to \mathcal{R}(D_N,E)$, definiert durch $\mathcal{F}(T): f \to \langle f,T\rangle$, T aufgefaßt als Element von $L(\mathcal{Q}(D_N),E)$, ist ein topologischer Isomorphismus.

3.15 Bemerkungen. 1) Die Fouriertransformation auf $\mathcal{R}(D_N,E)$ wird häufig anstelle von $\mathcal{F}$ ebenfalls mit $\hat{}$ bezeichnet.

2) Ist U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$, so erfüllt eine pseudokonvexe Umgebung V_o von U in $\mathbb{C}^N$ mit $U = V_o \cap \mathbb{R}^N$ die Voraussetzungen von 3.12. Da $\mathcal{O}(V_o \setminus D_N,E)$ bzw. $\mathcal{O}(\hat{V}_j,E)$, $1 \le j \le N$, alle holomorphen, E-wertigen Funktionen auf $V_o \setminus D_N$ bzw. $\hat{V}_j$ enthält, folgt aus 3.12 und Ion;Kawai [15], § 3

$$\Gamma(U,\mathcal{R}^E) := H^N_U(V_o,\mathcal{O}^E) = H^N_U(V_o,\mathcal{O}^E),$$

wobei $\mathcal{O}^E$ die Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}^N$ mit Werten in E bezeichne. Nach [15], 2.5 stimmt daher $\mathcal{R}^E|_{\mathbb{R}^N}$ mit der Garbe $\mathcal{B}^E$ der E-wertige Hyperfunktionen auf $\mathbb{R}^N$ überein.

3) Die in 3.9 angegebene Isomorphie legt es nahe, die von Martineau [25] und Schapira [34] behandelte Konstruktion der Garbe der Hyperfunktionen auf $\mathbb{R}^N$ für einen Zugang zur Garbe $\mathcal{R}^E$ geeignet zu modifizieren. Der Existenzbeweis für die Garbe $\mathcal{R}^E$ ist sogar einfacher zu führen, da man wegen der Kompaktheit von D_N kein Verklebeargument benötigt. Die allgemeine Form dieses Satzes lautet:

Satz. Sei X ein kompakter topologischer Raum mit abzählbarer Basis. Zu jeder kompakten Teilmenge K von X gebe es einen Fréchet-Raum F_K, so daß für alle kompakten Teilmengen K und Q von X folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für $K \subset Q$ existiert eine stetige Inklusion $i_{KQ}: F_K \to F_Q$.

(2) Ist $K \subset Q$, und besitzt Q keine Zusammenhangskomponente, die K nicht trifft, so hat i_{KQ} dichtes Bild.

(3) Zu jedem $f \in F_{KUQ}$ existieren $g \in F_K$ sowie $h \in F_Q$ mit $f = g + h$, wenn man g und h vermöge (1) als Elemente von F_{KUQ}

auffaßt.

(4) Für jede abzählbare Familie $(K_i)_{i \in I}$ kompakter Teilmengen von X gilt $\bigcap_{i \in I} F_{K_i} = F_K$ mit $K = \bigcap_{i \in I} K_i$. Außerdem gilt $F_\emptyset = 0$.

Dann gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutige, welke Garbe $\mathcal{F}$ auf X, so daß für jede kompakte Teilmenge K von X $\Gamma_K(X,\mathcal{F}) = F_K$ gilt.

Im folgenden wird nur die Konstruktion von $\mathcal{F}$ skizziert, für den ausführlichen Beweis sei auf Junker [17], Kap. III, 2.3 verwiesen.
Man definiert $\mathcal{F}$ als die zu folgendem Garbendatum assoziierte Garbe:

$\mathcal{F}(V) := {}^{F_X}/_{F_{X \setminus V}}$, $V \subset X$ offen.

$\rho_{V,U}: \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$, $\rho_{V,U}(F) := r^X_{V,U}([f])$, wobei $U,V \subset X$ offen, $U \subset V$, $F = [f] \in \mathcal{F}(V)$ sowie $r^X_{V,U}$ durch Faktorisierung der Quotientenabbildung $F_X \to {}^{F_X}/_{F_{X \setminus U}}$ über $F_{X \setminus V}$ entstehe.

Für $K \subset D_N$ kompakt sei $F_K = \mathcal{E}(K) \otimes_{\mathcal{D}(K)} E$. Dann genügen die Räume F_K den eben aufgeführten Bedingungen. Offensichtlich gilt (1), während (3) in 3.11 gezeigt wurde. Wie in 3.10 beweist man (2). Die vierte Bedingung zeigt man zunächst für den Fall $E = \mathbb{C}$, und wendet dann Tensorprodukttechniken an (vgl. [17], Kap. III, 3.3).

Aus (1) folgt ferner, daß $\mathcal{F}(V) = {}^{F_X}/_{F_{X \setminus V}} = {}^{F_{\overline{V}}}/_{F_{\partial V}}$, $V \subset D_N$ offen, gilt. Dies impliziert wegen (3.10.1), daß die hier skizzierte Konstruktion bis auf Isomorphie die Garbe $\mathcal{R}^E$ aus 3.1 liefert. Wählt man diesen Martineau-Zugang, so kann man die in 3.12 hergeleitete Randwertdarstellung für E-wertige Fourierhyperfunktionen nur für die globalen Schnitte in $\mathcal{R}^E$ beweisen. Dies genügt jedoch, um die Köthe-Dualität zu erhalten.

§ 4 Der Satz vom Kern für Fourierhyperfunktionen

Seien $K \subset D_N$ und $L \subset D_M$ kompakt. Nach Pietsch [29], 7.4.3 und 1.11 gilt folgende abstrakte Version des Satzes vom Kern:

Jede stetige Bilinearform auf $\mathcal{Q}(K) \times \mathcal{Q}(L)$ ist nuklear.

In diesem Abschnitt soll jedoch die sogenannte Schwartzsche Fassung dieses Satzes bewiesen werden, d.h. ein Analogon zur Aussage, daß jede Distribution auf $U \times V$ eineindeutig eine $\mathcal{D}'(V)$-wertige Distribution auf U erzeugt, wobei $U \subset \mathbb{R}^N$ und $V \subset \mathbb{R}^M$ offen sind (vgl. Treves [39], Theorem 51.7). Daher muß man den Raum $\mathcal{Q}(K,F)$ der Keime schnell fallender holomorpher Funktionen auf K mit Werten in einem separierten, vollständigen lokalkonvexen Raum F einführen. Zur Definition (4.3) werden zwar Räume holomorpher Funktionen benutzt, doch kann man nur unter bestimmten Voraussetzungen an K $\mathcal{Q}(K,F)$ selbst als Funktionenraum interpretieren (4.4 4)). Ferner wird der Raum $\mathcal{Q}(K \times L)$ eingeführt, der i. allg. nicht isomorph zu $\mathcal{Q}(Q)$, $Q \subset D_{N+M}$ kompakt, ist (s. Beispiel im Anschluß an 4.8). Dies führt dazu, daß man den angestrebten Satz nur in den beiden Fällen $K \subset \mathbb{R}^N$ und $L \subset \mathbb{R}^M$ oder $K = D_N$ und $L = D_M$ erhält (4.10).

4.1 Definition. Seien $K \subset D_N$ kompakt, $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ wie in 1.8 und F ein Banach-Raum. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definiert man

$$\mathcal{Q}(U_m,F) := \{ f \in \mathcal{O}(U_m \cap \mathbb{C}^N, F) \mid \text{für jedes Kompaktum } Q \subset U_m \text{ und jedes}$$

$$p \in \mathbb{N},\ p \geq 2, \text{ gilt: } \sup\{\|f(z)\| e^{\frac{1}{m}(1-\frac{1}{p})|z|} \mid z \in Q \cap \mathbb{C}^N\} < \infty \} .$$

Außerdem setzt man

$$\mathcal{Q}(K,F) := \operatorname{ind}_{m \to} \mathcal{Q}(U_m,F) .$$

4.2 Lemma. Sind K und F wie in 4.1, so gilt topologisch

$$\mathcal{Q}(K,F) \simeq \mathcal{Q}(K) \otimes_\pi F .$$

Beweis. Für den Fréchet-Raum $\mathcal{Q}(U_m,F)$, $m \in \mathbb{N}$, beweist man zunächst mit Hilfe von 1.10 wie in 1.7, daß er topologisch isomorph zu $\mathcal{Q}(U_m) \hat{\otimes}_\pi F$ ist. Da $\mathcal{Q}(K)$ nach 1.11 insbesondere der starke Dualraum des nuklearen Fréchet-Raumes $\mathcal{Q}'_b(K)$ ist, folgt aus Meise [26], § 1, Satz 5:

$$\mathcal{Q}(K,F) = \operatorname{ind}_{m\to} \mathcal{Q}(U_m,F) \simeq \operatorname{ind}_{m\to} (\mathcal{Q}(U_m) \hat{\otimes}_\pi F) \simeq (\operatorname{ind}_{m\to} \mathcal{Q}(U_m)) \hat{\otimes}_\pi F \simeq$$

$$\simeq \mathcal{Q}(K) \hat{\otimes}_\pi F \ .$$

Bemerkung. Aus Schaefer [33], Chap. II, 7.2, Cor. 2 und 8.2, Cor. 2 sowie aus Grothendieck [12], Chap. I, § 1, n° 3, Prop. 5.2 erhält man, daß $\mathcal{Q}(K,F)$ für einen Banach-Raum F ein vollständiger, tonnelierter und bornologischer (DF)-Raum ist.

4.3 Definition. Sei F ein separierter, vollständiger lokalkonvexer Raum. Stellt man F als projektiven Limes des projektiven Spektrums $\{F_\alpha,\pi_{\alpha,\beta}\}_{\alpha \in A}$ von Banach-Räumen dar, so definiert man für jede kompakte Teilmenge K von D_N den Raum der *Keime schnell fallender, F-wertiger holomorpher Funktionen* durch

$$\mathcal{Q}(K,F) := \operatorname{proj}_{\leftarrow\alpha} \mathcal{Q}(K,F_\alpha) \ .$$

4.4 Bemerkungen. 1) Meise [26], § 2, Lemma 3 zeigt, daß die linearen, stetigen Abbildungen $\rho_{n,\alpha,\beta}: \mathcal{Q}(U_n,F_\beta) \to \mathcal{Q}(U_n,F_\alpha)$ mit $\rho_{n,\alpha,\beta}(f) := \pi_{\alpha,\beta} \circ f$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\alpha,\beta \in A$, $\alpha \leq \beta$, stetige Spektralabbildungen $\rho_{\alpha,\beta}: \mathcal{Q}(K,F_\beta) \to \mathcal{Q}(K,F_\alpha)$ induzieren. Daher ist die vorangehende Definition sinnvoll.

2) Beachtet man, daß $\mathcal{Q}(K)$ nuklear und tonneliert sowie sein starker Dualraum Montelsch sind, so folgt unter den Voraussetzungen von 4.3 aus 4.2 und [26], § 1, Satz 1

$$(4.4.1)\quad \mathcal{Q}(K,F) = \operatorname{proj}_{\leftarrow\alpha} \mathcal{Q}(K,F_\alpha) \simeq \operatorname{proj}_{\leftarrow\alpha} \mathcal{Q}(K) \hat{\otimes}_\pi F_\alpha \simeq$$

$$\simeq \operatorname{proj}_{\leftarrow\alpha} F_\alpha \varepsilon \mathcal{Q}(K) \simeq \operatorname{proj}_{\leftarrow\alpha} L_b(\mathcal{Q}'_b(K),F_\alpha) \simeq$$

$$\simeq L_b(\mathcal{Q}'_b(K),F) \simeq \mathcal{Q}(K) \varepsilon F \simeq \mathcal{Q}(K) \hat{\otimes}_\pi F \ .$$

3) Sei F ein separierter, vollständiger lokalkonvexer Raum, der als induktiver Limes des Einbettungsspektrums $\{F_n,i_{n,m}\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Banach-Räumen dargestellt werden kann. Ferner seien $K \subset D_N$ kompakt und $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsfolge von K gemäß 1.8. Definiert man für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{Q}(U_m,F) := \{f \in \mathcal{O}(U_m \cap \mathbb{C}^N,F) \mid \text{für jedes } Q \subset U_m \text{ kompakt, jedes}$$

$p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ und für jede stetige Halbnorm q auf F gilt: $\sup\{q(f(z))e^{\frac{1}{m}(1-\frac{1}{p})|z|} \mid z \in Q \cap \mathbb{C}^N\} < \infty\}$,

so existiert eine stetige Einbettung

$$\sigma: \mathcal{Q}(K,F) \to \operatorname{ind}_{n\to} \mathcal{Q}(U_n,F) \ .$$

Beweis. Aus Teil 2) und [26], § 1, Satz 5 folgt wie in 4.2

$$\mathcal{Q}(K,F) \simeq \mathcal{Q}(K) \hat{\otimes}_\pi F \simeq \operatorname{ind}_{n\to} (\mathcal{Q}(U_n) \hat{\otimes}_\pi F_n) \simeq \operatorname{ind}_{n\to} \mathcal{Q}(U_n,F_n) =: G \ .$$

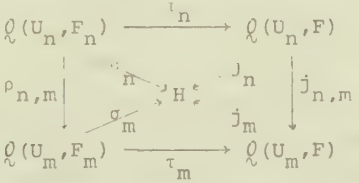
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\tau_n: \mathcal{Q}(U_n,F_n) \to \mathcal{Q}(U_n,F)$ durch $\tau_n(f) := i_n \circ f$ definiert. Ferner sei für alle $n,m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ die Einschränkung vektorwertigen holomorpher Funktionen von $U_n \cap \mathbb{C}^N$ auf $U_m \cap \mathbb{C}^N$ mit $j_{n,m}$ bezeichnet. Setzt man dann $\rho_{n,m}: \mathcal{Q}(U_n,F_n) \to \mathcal{Q}(U_m,F_m)$, $\rho_{n,m}(F) := j_{n,m}(i_{n,m} \circ f) = i_{n,m} \circ j_{n,m}(f)$, so gilt für jedes $f \in \mathcal{Q}(U_n,F_n)$

$$\tau_m \circ \rho_{n,m}(f) = i_m \circ i_{n,m} \circ (j_{n,m}(f)) = j_{n,m}(i_n \circ f) = j_{n,m} \circ \tau_n(f) \ .$$

Daher gilt für $\sigma_n: \mathcal{Q}(U_n,F_n) \to \operatorname{ind}_{m\to} \mathcal{Q}(U_m,F) =: H$, $\sigma_n = j_n \circ \tau_n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sigma_n = j_n \circ \tau_n = j_m \circ j_{n,m} \circ \tau_n = j_m \circ \tau_m \circ \rho_{n,m} = \sigma_m \circ \rho_{n,m} \ ,$$

d.h. folgendes Diagramm ist kommutativ:



Also wird eine lineare Abbildung $\sigma: G \to H$ induziert. Diese ist stetig und injektiv, da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abbildungen j_n und τ_n , und damit auch σ_n, stetig und injektiv sind. •

4) Sei nun $K \subset D_N$ kompakt, so daß $K \cap \mathbb{R}^N$ eine Identifikationsmenge für $\mathcal{O}$ ist, d.h. jede auf einer Umgebung von $K \cap \mathbb{R}^N$ holomorphe Funktion, die auf $K \cap \mathbb{R}^N$ verschwindet, ist bereits identisch O. Dabei gelte $K \cap \mathbb{R}^N \neq \emptyset$.
Unter dieser Voraussetzung zeigt man wie in Meise [26], § 2, Be-

merkung 1, daß man $\mathcal{Q}(K,F)$ als den Raum

$$\{f: K \cap \mathbb{C}^N \to F \mid \text{zu jeder stetigen Halbnorm } p \text{ auf } F \text{ existieren ein } m \in \mathbb{N} \text{ und ein } f_p \in \mathcal{Q}(U_m, \hat{F}_p) \text{ mit } \pi_p \cdot f = f_{p \mid K \cap \mathbb{C}^N}\}$$

interpretieren kann. Dabei bezeichnet $\hat{F}_p$ die vollständige Hülle von $F/p^{-1}(0)$ und $\pi_p: F \to \hat{F}_p$ die Quotientenabbildung. Insbesondere kann man also für $K = D_N$ $\mathcal{Q}(K,F)$ als Funktionenraum auffassen.

Bezeichnungen. Im folgenden seien für natürliche Zahlen N und M K bzw. L kompakte Teilmengen von D_N bzw. D_M, deren Schnitt mit $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{R}^M$ nicht leer seien. Hierzu wähle man gemäß 1.8 Folgen $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ bzw. $(V_m)_{m \in \mathbb{N}}$ offener Umgebungen. Ferner definiere man für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{Q}(U_m \times V_m) := \{f \in \mathcal{O}((U_m \cap \mathbb{C}^N) \times (V_m \cap \mathbb{C}^M)) \mid \text{für alle } K' \subset U_m \text{ und } L' \subset V_m \text{ kompakt sowie für alle } p \geq 2 \text{ gilt: } \sup\{|f(z)| e^{\frac{1}{m}(1-\frac{1}{p})|z|} \mid z \in (K' \cap \mathbb{C}^N) \times (L' \cap \mathbb{C}^M)\} < \infty\} .$$

Versieht man diesen Raum mit der in natürlicher Weise sich anbietenden lokalkonvexen Topologie, so sind die Einschränkungsabbildungen injektiv und stetig und genügen den Verträglichkeitsbedingungen für induktive Spektren. Der induktive Limes dieses Spektrums wird mit $\mathcal{Q}(K \times L)$ bezeichnet.

In mehreren Schritten wird nun der Beweis des Schwartzschen Satzes vom Kern vorbereitet. Dabei entspricht die Vorgehensweise der in Petzsche [28], § 4, allerdings werden im vorliegenden Fall nicht die de Wilde-Graphensätze benötigt.

4.5 Lemma. Durch die Abbildungen

$$\psi_m: \mathcal{Q}(U_m) \times \mathcal{Q}(V_m) \to \mathcal{Q}(U_m \times V_m), \quad \psi_m(f,g)(z,w) := f(z) \cdot g(w),$$

$m \in \mathbb{N}$, wird eine stetige Abbildung $\psi: \mathcal{Q}(K) \times \mathcal{Q}(L) \to \mathcal{Q}(K \times L)$ induziert.

Beweis. Die Stetigkeit der Abbildungen ψ_m, $m \in \mathbb{N}$, ergibt sich un-

mittelbar aus der Definition von $\mathcal{Q}(U_m \times V_m)$. Da sie ferner mit den Einschränkungsabbildungen vertauschen, folgt die Behauptung.

4.6 Lemma. Es existiert eine stetige lineare Abbildung

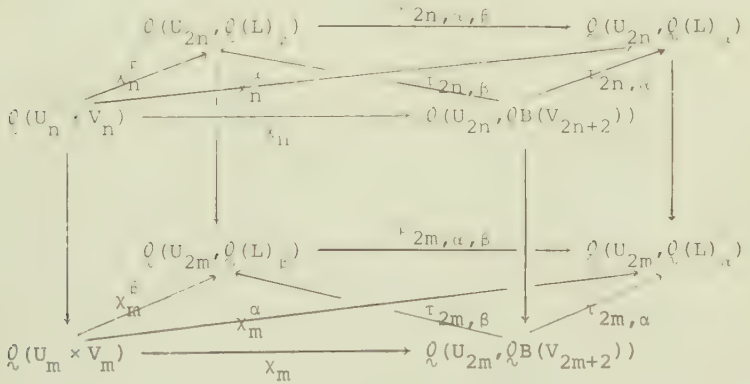
$$\chi\colon \mathcal{Q}(K \times L) \to \mathcal{Q}(K,\mathcal{Q}(L)).$$

Genügen K und L der Voraussetzung von 4.4 4), und faßt man dementsprechend $\mathcal{O}(K)$, $\mathcal{O}(L)$, $\mathcal{O}(K \times L)$ sowie $\mathcal{Q}(K,\mathcal{Q}(L))$ als Funktionenräume auf, so gilt $\chi(f)(x) = f(x,\cdot)$, $x \in K \cap \mathbb{R}^N$.

Beweis. Der Raum $\mathcal{O}(L)$ sei als projektiver Limes des projektiven Spektrums $\{\mathcal{Q}(L)_\alpha, \pi_{\alpha,\beta}\}_{\alpha \in A}$ von Banach-Räumen dargestellt.
Es genügt nun zu zeigen, daß für jede natürliche Zahl m

$$\chi_m\colon \mathcal{O}(U_m \times V_m) \to \mathcal{Q}(U_{2m},\mathcal{Q}B(V_{2m+2})),\ \chi_m(f)(z)\colon w \mapsto f(z,w),$$

$z \in U_{2m} \cap \mathbb{C}^N$ und $w \in V_{2m+2} \cap \mathbb{C}^N$, stetig ist. Denn dann werden für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $\alpha \in A$ stetige Abbildungen $\chi_m^\alpha\colon \mathcal{Q}(U_m \times V_m) \to \mathcal{Q}(K,\mathcal{Q}(L)_\alpha)$ induziert, so daß folgendes Diagramm kommutativ wird:



Dabei gilt $n \leq m$ und $\alpha \leq \beta$. Außerdem bedeuten alle von oben nach unten verlaufende Pfeile Einschränkungsabbildungen. Für $j = n,m$ und $\gamma = \alpha,\beta$ gilt ferner $\rho_{2j,\alpha,\beta}(f) = \pi_{\alpha,\beta} \circ f$ sowie $\tau_{2j,\gamma}(f) = \pi_\gamma \circ i_{2j+2} \circ f$, wobei $i_{2j+2}\colon \mathcal{Q}B(V_{2j+2}) \to \mathcal{Q}(L)$.
Daher werden stetige lineare Abbildungen $\chi^\alpha\colon \mathcal{Q}(K \times L) \to \mathcal{Q}(K,\mathcal{Q}(L)_\alpha)$

$\alpha \in A$, mit $\chi^\alpha = \rho_{\alpha,\beta} \circ \chi^\beta$ induziert, wobei $\alpha \leq \beta$ und $\rho_{\alpha,\beta}: \mathcal{Q}(K,\mathcal{Q}(L)_\beta) \to \mathcal{Q}(K,\mathcal{Q}(L)_\alpha)$, $\rho_{\alpha,\beta}(f) := \pi_{\alpha,\beta} \circ f$. Dies liefert schließlich die Abbildung χ mit der gewünschten Darstellung.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Ferner sei $f \in \mathcal{Q}(U_m \times V_m)$ beliebig. Für jedes $z \in U_{2m} \cap \mathbb{C}^N$ ist die Funktion $g_z(w) := f(z,w)$ holomorph und schnell fallend auf $V_{2m+2} \cap \mathbb{C}^M$, denn es gilt

$$|g_z(w)|e^{\frac{1}{2m+2}|w|} \leq |f(z,w)|e^{\frac{1}{m+1}|(z,w)|} \leq |f(z,w)|e^{\frac{1}{m}(1-\frac{1}{p})|(z,w)|} \leq$$

$$\leq \sup\{|f(z,\zeta)|e^{\frac{1}{m}(1-\frac{1}{p})|(z,\zeta)|} \mid \zeta \in \overline{V_{m+1}} \cap \mathbb{C}^M\} < \infty ,$$

da für $p > m+1$ $\frac{1}{m+1} < \frac{1}{m}(1-\frac{1}{p})$ gilt. Nach Wahl von f kann man g_z stetig auf $\overline{V_{2m+2}} \cap \mathbb{C}^M$ fortsetzen. Daher erhält man durch $g(z) := g_z$ eine Abbildung von $U_{2m} \cap \mathbb{C}^N$ in $\mathcal{Q}B(V_{2m+2})$, die, wie folgende Abschätzung zeigt, schnell fällt. Denn für jedes $p > m+1$ und jedes $z \in U_{2m} \cap \mathbb{C}^N$ gilt:

$$\|g(z)\|_{2m+2} e^{\frac{1}{2m}(1-\frac{1}{p})|z|} = \sup\{|f(z,w)|e^{\frac{1}{2m}(1-\frac{1}{p})|z| + \frac{|w|}{2m+2}} \mid w \in \overline{V_{2m+2}} \cap \mathbb{C}^M\} \leq$$

$$\leq \sup\{|f(z,w)|e^{(\frac{1}{2m}(1-\frac{1}{p}) + \frac{1}{2m+2})|(z,w)|} \mid w \in \overline{V_{2m+2}} \cap \mathbb{C}^M\} \leq$$

$$\leq \sup\{|f(\zeta,w)|e^{\frac{1}{m}(1-\frac{1}{p})|(\zeta,w)|} \mid w \in \overline{V_{2m+2}} \cap \mathbb{C}^M;\ \zeta \in \overline{U_{2m}} \cap \mathbb{C}^N\} .$$

Diese Abschätzung liefert zugleich auch die Stetigkeit von χ_m, wenn g holomorph ist.

Da $\overline{U_{2m}}$ in U_{m+1} und $\overline{V_{2m+2}}$ in V_{m+1} kompakt enthalten sind, existiert ein positives R, so daß für alle $1 \leq j \leq N$ und für alle $(z,w) \in (U_{2m} \cap \mathbb{C}^N) \times (V_{2m+2} \cap \mathbb{C}^M)$ die Menge $G_{j,z,w} := \{(z_\zeta, w) \in \mathbb{C}^{N+M} \mid z_\zeta = (z_1,..,z_{j-1},\zeta,z_{j+1},..,z_N)$ und $|\zeta - z_j| \leq R\}$ enthalten ist in $(U_{m+1} \cap \mathbb{C}^N) \times (V_{m+1} \cap \mathbb{C}^M)$. Ferner seien $r \in (0,R)$ fest und $h,k \in \mathbb{C}$ mit $0 < |h|,|k| \leq r$ sowie $h \neq k$ beliebig gewählt. Dann gilt für jedes $1 \leq j \leq N$, alle $z \in U_{2m} \cap \mathbb{C}^N$ und für alle $w \in V_{2m+2} \cap \mathbb{C}^M$:

$$B_z(h,k,w) := \left|\frac{f(z+he_j,w) - f(z,w)}{h(h-k)} - \frac{f(z+ke_j,w) - f(z,w)}{k(h-k)}\right| e^{\frac{1}{2m+2}|w|} =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_{j,z,w}} e^{\frac{|w|}{2m+2}} \frac{f(z_\zeta, w)}{h-k} \left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\zeta - z_j - h} - \frac{1}{\zeta - z_j} \right) - \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\zeta - z_j - k} - \frac{1}{\zeta - z_j} \right) \right] d\zeta \right| \cdot$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G_{j,z,w}} e^{\frac{|w|}{2m+2}} \left| \frac{f(z_\zeta, w)}{h-k} \left(\frac{1}{(\zeta - z_j - h)(\zeta - z_j)} - \frac{1}{(\zeta - z_j - k)(\zeta - z_j)} \right) \right| d\zeta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G_{j,z,w}} |f(z_\zeta, w)| e^{\frac{1}{2m+2}|(z_\zeta, w)|} \frac{1}{|\zeta - z_j||\zeta - z_j - h||\zeta - z_j - k|} d\zeta \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup\{ |f(\xi)| e^{\frac{1}{m}(1-\frac{1}{p})|\xi|} \mid \xi \in (\overline{U_{m+1}} \cap \mathbb{C}^N) \times (\overline{V_{m+1}} \cap \mathbb{C}^M) \} \cdot \frac{2\pi R}{R(R-r)^2} \leq$$

$$\leq C(f,m) \cdot (R-r)^{-2}$$

unabhängig von w,h und k, wobei $p \geq 2$ beliebig ist.

Für eine Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|h_n| \leq r$, $n \in \mathbb{N}$, ist daher $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := \dfrac{g(z+h_n e_j) - g(z)}{h_n}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{Q}B(V_{2m+2})$, denn es gilt für jedes $q \in \mathbb{N}$

$$\|x_n - x_{n+q}\|_{2m+2} = |h_n - h_{n+q}| \sup \{ B_z(h_n, h_{n+q}, w) \mid w \in \overline{V_{2m+2}} \cap \mathbb{C}^M \} \cdot$$

$$\leq C(f,m) \, (R-r)^{-2} |h_n - h_{n+q}| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

unabhängig von q. Damit ist g holomorph auf $U_{2m} \cap \mathbb{C}^N$ mit Werten in dem Banach-Raum $\mathcal{Q}B(V_{2m+2})$, was den Beweis beendet. •

Bemerkung. Für die folgende Anwendung von 4.6 benötigt man die Stetigkeit von χ nicht, vgl. hierzu Petzsche [28], 4.2.

4.7 Satz. Genügen die Kompakta K und L der Voraussetzung von 4.4 4), so induziert die Abbildung ψ aus 4.5 einen topologischen Isomorphismus zwischen $\mathcal{Q}(K) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{Q}(L)$ und $\mathcal{Q}(K \times L)$.

Beweis. Zunächst induziert ψ eine stetige lineare Abbildung $\bar{\psi}: \mathcal{Q}(K) \otimes_\pi \mathcal{Q}(L) \to \mathcal{Q}(K \times L)$, deren stetige Fortsetzung auf die vollständige Hülle des Tensorproduktes mit $\hat{\psi}$ bezeichnet wird. Der in (4.4.1) angegebene Isomorphismus zwischen $\mathcal{Q}(K) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{Q}(L)$ und $\mathcal{Q}(K, \mathcal{Q}(L))$ werde durch die Abbildung φ gegeben, deren Ein-

schränkung auf $\mathcal{Q}(K) \otimes_\pi \mathcal{Q}(L)$ mit der durch $\varphi([f]_K \otimes [g]_L) := [f \cdot [g]_L]_{K,L}$ definierten Abbildung übereinstimmt, wobei mit $[\cdot]_Q$ bzw. $[\cdot]_{K,L}$ die Restklassenbildung in $\mathcal{Q}(Q)$, $Q = K,L$, bzw. in $\mathcal{Q}(K,\mathcal{Q}(L))$ bezeichnet ist.
Nach Konstruktion von $\bar{\psi}$ und χ ist daher folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}(K) \otimes_\pi \mathcal{Q}(L) & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \mathcal{Q}(K \times L) \\ \varphi \downarrow & \nearrow_{\chi} & \\ \mathcal{Q}(K,\mathcal{Q}(L)) & & \end{array}$$

Seien nun $f \in \mathcal{Q}(K) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{Q}(L)$ und $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein gegen f konvergentes Netz in $\mathcal{Q}(K) \otimes \mathcal{Q}(L)$. Ferner seien mit δ_K, δ_L bzw. $\delta_{K\times L}$ die Punktauswertungen auf $\mathcal{Q}(K)$, $\mathcal{Q}(L)$ bzw. $\mathcal{Q}(K \times L)$ bezeichnet, wobei diese Räume aufgrund der Voraussetzung als Räume von Funktionen auf $K \cap \mathbb{R}^N$, $L \cap \mathbb{R}^M$ bzw. $(K \cap \mathbb{R}^N) \times (L \cap \mathbb{R}^M)$ aufgefaßt werden. Die jeweilige natürliche Topologie dieser Funktionenräume ist feiner als die Topologie der punktweisen Konvergenz, so daß diese Funktionale stetig sind. Da man auch $\mathcal{Q}(K,\mathcal{Q}(L))$ als Raum von auf $K \cap \mathbb{R}^N$ definierten Funktionen interpretieren kann, gilt:

$$\delta_L(\delta_K(\varphi(f))) = \lim_{\alpha\to} \delta_L(\delta_K(\varphi(f_\alpha))) = \lim_{\alpha\to} \delta_L(\delta_K(\chi\circ\bar{\psi}(f_\alpha))) =$$

$$= \lim_{\alpha\to} \delta_{K\times L}(\psi(f_\alpha)) = \delta_{K\times L}(\psi(f)) = \delta_L(\delta_K(\chi\circ\bar{\psi}(f))) ,$$

denn nach Konstruktion von χ gilt für jedes $g \in \mathcal{Q}(K) \otimes \mathcal{Q}(L)$, jedes $x \in K \cap \mathbb{R}^N$ und jedes $y \in L \cap \mathbb{R}^M$ $(\chi\circ\psi(g))(x))[y] = \psi(g)(x,y)$, was $\delta_{K\times L}(\psi(g)) = \delta_L(\delta_K(\chi\circ\psi(g)))$ liefert. Insgesamt folgt daher $\hat{\varphi} = \chi\circ\hat{\psi}$.

Da φ bijektiv ist, ist χ insbesondere surjektiv. Sei $[f] \in N(\chi)$. Dann gilt für alle $x \in K \cap \mathbb{R}^N$, alle $y \in L \cap \mathbb{R}^M$ und für jeden Repräsentanten f von $[f]$ $f(x,y) = 0$, was nach Wahl von K und L $[f] = 0$ in $\mathcal{Q}(K \times L)$ impliziert. Also ist χ bijektiv und somit auch $\hat{\psi} = \chi^{-1}\circ\hat{\varphi}$.

Aufgrung der Stetigkeit von $\hat{\psi}$ erhält man die Behauptung mit Hilfe des Satzes von der offenen Abbildung (Schaefer [33], Chap. III, 2.2). ●

Sind F und G lokalkonvexe Räume, so bezeichnet man den Raum der stetigen Bilinearformen auf $F \times G$ mit $B(F,G)$. Versieht man diesen Raum mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Produkten beschränkter Mengen in F bzw. G, so schreibt man $B_b(F,G)$. Man erhält somit folgende Fassung des Satzes vom Kern:

4.8 Satz. 1) Für alle kompakten Teilmengen K von D_N sowie L von D_M gilt topologisch

$$B_b(\mathcal{Q}(K),\mathcal{Q}(L)) \simeq (\mathcal{Q}(K) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{Q}(L))'_b \simeq \mathcal{Q}'_b(K) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{Q}'_b(L)$$
$$\simeq L_b(\mathcal{Q}(K),\mathcal{Q}'_b(L)) \ .$$

2) Unter den Voraussetzungen von 4.7 gelten folgende topologische Isomorphien

$$B_b(\mathcal{Q}(K),\mathcal{Q}(L)) \simeq \mathcal{Q}'_b(K,\mathcal{Q}(L)) \simeq \mathcal{Q}'_b(K \times L) \ .$$

Beweis. 1) Da $\mathcal{Q}(K)$ und $\mathcal{Q}(L)$ vollständige, nukleare (DF)-Räume sind, erhält man die beiden ersten Isomorphien aus Grothendieck [12], Chap. II, § 3, n° 1, Cor. 1, p. 75 sowie Théorème 12. Da $\mathcal{Q}'_b(L)$ ein Fréchet-Raum ist, folgt die letzte Isomorphie aus 3.9.

2) Diese Aussage ergibt sich unmittelbar aus 1), (4.4.1) und 4.7. •

Dieses Resultat liefert die angestrebte Beschreibung der $\mathcal{Q}'_b(L)$-wertigen Fourierhyperfunktionen mit Träger in K durch skalarwertige, wenn man zu gegebenen K und L wie in 4.7 eine kompakte Teilmenge Q von D_{N+M} findet, so daß $\mathcal{Q}(K \times L)$ topologisch isomorph zu $\mathcal{Q}(Q)$ ist. Trivialerweise gilt dies, wenn K bzw. L kompakt in $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{R}^M$ enthalten sind. Das folgende Beispiel zeigt jedoch, daß man diese Isomorphie z.B. nicht mehr in natürlicher Weise erhalten kann, wenn $K \not\subset \mathbb{R}^N$, aber $L \subset \mathbb{R}^M$ gilt. Um den Sachverhalt möglichst anschaulich zu machen, wird nur ein sehr einfacher Spezialfall behandelt.

Beispiel. Es gelte $K := [-\infty,\infty]$ sowie $L := \{0\}$. Durch $U_n := K \times i(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ und $V_n := (-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) \times i(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, erhält man

Folgen offener Umgebungen von K und L, die den Bedingungen aus 1.8 genügen. Ferner sei W eine offene Umgebung von $K \times L$ in Z_2. Dann enthält $W \cap D_2$ einen abgeschnittenen Kegel, d.h. es existieren $\varepsilon, r > 0$, so daß $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \geq r;\ |v| \leq \varepsilon |u|\} \subset W \cap D_2$ gilt. Dies sieht man leicht ein, wenn man beachtet, daß die Topologie von D_2 durch die Metrik d_2 mit

$$d_2(x,y) := \|f(x) - f(y)\|_2 \quad \text{und} \quad f(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+|x|_2} & , x \in \mathbb{R}^2 \\ y_x & , x \in D_2 \setminus \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

gegeben wird, wobei y_x den Schnittpunkt der Sphäre S^1 mit der Ursprungsgeraden, die in radialer Richtung auf x zuläuft, bezeichnet.

Dies garantiert zwar für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ die Stetigkeit der Inklusion $\mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(U_n \times V_n)$, aber man kann zu einer gegebenen natürlichen Zahl n keine Umgebung W von $K \times L$ in Z_2 finden, so daß man durch Fortsetzung der Funktionen $\mathcal{O}(U_n \times V_n)$ in $\mathcal{O}(W)$ auf natürliche Weise einbetten kann.

Die Schwierigkeiten kommen daher, daß die Produkte $(U_n \cap \mathbb{C}^N) \times (V_n \cap \mathbb{C}^M)$, $n \in \mathbb{N}$, im allgemeinen zuwenig Halbgeraden in radialer Richtung enthalten. Dies kann jedoch im Fall $K = D_N$ und $L = D_M$ nicht auftreten. Es gilt

4.9 Lemma. $\mathcal{O}(D_N \times D_M)$ ist topologisch isomorph zu $\mathcal{O}(D_{N+M})$.

Beweis. Durch $U_n^I := D_I \times i(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})^I$, $n \in \mathbb{N}$ und $I \in \{N, M, N+M\}$, werden offene Umgebungen von D_N, D_M und D_{N+M} definiert, die den Voraussetzungen von 1.8 genügen. Außerdem gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\overline{U_n^{N+M}} \cap \mathbb{C}^{N+M} = (\overline{U_n^N} \cap \mathbb{C}^N) \times (\overline{U_n^M} \cap \mathbb{C}^M)$. Hieraus erhält man sofort, daß $\mathcal{O}B(U_n^N \times U_n^M)$ mit $\mathcal{O}B(U_n^{N+M})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ topologisch übereinstimmt, was die Behauptung impliziert. •

Daher kann man mit Hilfe von 4.8 den Schwartzschen Satz vom Kern nur für die globalen Schnitte in die Garbe der Fourierhyperfunktionen beweisen. Man erhält:

4.10 Folgerung. Es gilt topologisch

$$R(D_{N+M}) \simeq R(D_N, R(D_M)) \simeq R(D_M, R(D_N)) \simeq R(D_N) \hat{\otimes}_\pi R(D_M) \ .$$

§ 5 Der Satz von Bochner-Schwartz für skalarwertige Fourierhyperfunktionen

Das angestrebte Resultat (5.8) charakterisiert sogenannte positiv semidefinite Fourierhyperfunktionen durch Borel-Maße auf $\mathbb{R}^N$, die für jedes positive ε langsamer als $e^{\varepsilon\|\cdot\|}$ wachsen. In Anlehnung an die Notation in Gelfand;Wilenkin [9], Kap. II heißt eine Fourierhyperfunktion T positiv semidefinit, wenn für jedes $g \in \mathcal{Q}(D_N)$ $\langle g*\check{\bar{g}}, T\rangle \geq 0$ gilt, wobei $g*\check{\bar{g}}$ die holomorphe Fortsetzung des Faltungsproduktes der L^1-Funktionen g und $\check{\bar{g}}$ ist (s. 5.1 1)). Außerdem wird die Faltung einer Fourierhyperfunktion mit einer schnell fallenden holomorphen Funktion erklärt (5.2). Des Beweis des oben angegebenen Resultates erfolgt ähnlich wie im Fall der Distributionen (vgl. [9]) oder der Ultradistributionen (vgl. Constantinescu;Weingärtner [5]) durch Zurückführen auf den Satz von Bochner. Da im vorliegenden Fall der Grundraum $\mathcal{Q}(D_N)$ keine Funktionen mit kompakten Träger enthält, müssen die Beweisschritte in [5] oder [9], in denen ein Approximationsargument benutzt wird, modifiziert werden. Dabei wird wesentlich die Tatsache ausgenutzt, daß die Fouriertransformation ein topologischer Isomorphismus auf $\mathcal{Q}(D_N)$ ist (s. Kawai [18], 3.2.4).

5.1 Lemma. 1) Für jedes $f \in \mathcal{Q}(D_N)$ und jede (stetige) L^1-Funktion, für die $g\cdot\exp(\frac{1}{j}|\cdot|) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ für ein $j \in \mathbb{N}$, kann man die Funktion

$$f*g(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\cdot g(y)\, dm_N(y),\ x \in \mathbb{R}^N,$$

zu einem Element von $\mathcal{Q}(D_N)$ fortsetzen.

2) Die Faltung $*: \mathcal{Q}(D_N) \times \mathcal{Q}(D_N) \to \mathcal{Q}(D_N)$ ist eine stetige bilineare Abbildung. Das Faltungsprodukt ist außerdem assoziativ und kommutativ.

Beweis. 1) Ist $f \in \mathcal{Q}(D_N)$ beliebig, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f \in \mathcal{Q}B(U_m)$, wobei im folgenden stetes $U_k := D_N \times i(-\frac{1}{k},\frac{1}{k})^N$, $k \in \mathbb{N}$, gelte.
Da f auf $\overline{U_m} \cap \mathbb{C}^N$ beschränkt ist, kann man auf $U_m \cap \mathbb{C}^N$ $f*g(z)$

durch $\int_{\mathbb{R}^N} f(z-y)\cdot g(y)\, dm_N(y)$ definieren. Setzt man für $n \in \mathbb{N}$ $K_n := [-n,n]^N$ sowie $h_n(z) := \int_{K_n} f(z-y)\cdot g(y)\, dm(y)$, $z \in U_m \cap \mathbb{C}^N$, so konvergiert die Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $U_m \cap \mathbb{C}^N$ gegen $f*g$. Denn es gilt

$$\sup_{z\in U_m\cap\mathbb{C}^N} |f*g(z) - h(z)| \leq \sup_{z\in U_m\cap\mathbb{C}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(z-y)g(y)|(1-\chi_{K_n}(y))dm(y)$$

$$\leq \sup\{|f(w)| \mid w \in U_m \cap \mathbb{C}^N\}\cdot \|g(1-\chi_{K_n})\|_{L^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 ,$$

wobei mit χ_{K_n} die charakteristische Funktion von K_n bezeichnet ist. Aus Sätzen über Integrale mit Parametern erhält man unmittelbar die Holomorphie von $f*g$ auf $U_m \cap \mathbb{C}^N$. Für $k > \max\{m,j\}$ ergibt sich aus der Abschätzung

$$(5.1.1)\quad \sup\{|f*g(z)|e^{\frac{1}{k}|z|} \mid z \in \overline{U_k} \cap \mathbb{C}^N\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |f(z-y)|\,|g(y)|\,e^{\frac{1}{k}(|z-y|+|y|)}\, dm(y) \,\middle|\, z\in\overline{U_k}\cap\mathbb{C}^N \right\} \leq$$

$$\leq \sup\{|f(w)|e^{\frac{1}{m}|w|} \mid w \in \overline{U_m} \cap \mathbb{C}^N\}\cdot \|g\cdot e^{\frac{1}{k}|\cdot|}\|_{L^1} < \infty$$

auch das gewünschte Wachstumsverhalten, d.h. $f*g \in \mathcal{O}_{\sim}B(U_k)$.

2) Sind $f,g \in \mathcal{O}_{\sim}(D_N)$ beliebig gewählt, so wähle man $j \in \mathbb{N}$ mit $g \in \mathcal{O}_{\sim}B(U_{j-1})$. Dann sind die Voraussetzungen von 1) erfüllt, und es gilt $f*g \in \mathcal{O}_{\sim}B(U_k)$ für $k > \max\{m,j\}$, falls $f \in \mathcal{O}_{\sim}B(U_m)$. Die Abschätzung (5.1.1) liefert jetzt

$$\sup\{|f*g(z)|e^{\frac{1}{k}|z|} \mid z \in \overline{U_k} \cap \mathbb{C}^N\} \leq$$

$$\leq \sup_{w\in\overline{U_m}\cap\mathbb{C}^N} |f(w)|e^{\frac{1}{m}|w|} \cdot \sup_{w\in\overline{U_j}\cap\mathbb{C}^N} |g(w)|e^{\frac{1}{j}|w|} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-(\frac{1}{j}-\frac{1}{k})|y|}\, dm(y) .$$

Da die Faltung offenbar bilinear ist, impliziert dies die Stetigkeit von $*$ auf $\mathcal{O}_{\sim}B(U_m) \times \mathcal{O}_{\sim}B(U_j)$, $m,j \in \mathbb{N}$. Man beachte nun, daß $\mathcal{O}_{\sim}(D_N)$ als (DFS)-Raum insbesondere ein bornologischer (DF)-Raum

ist, der von einem regulären und folgenretraktiven Spektrum erzeugt wird. Bezeichnet man das System der beschränkten Teilmengen von $\mathcal{Q}(D_N)$ mit $\mathfrak{B}$, so folgt aus dem eben Gezeigten die $(\mathfrak{B},\mathfrak{B})$-Hypostetigkeit von $*$ auf $\mathcal{Q}(D_N) \times \mathcal{Q}(D_N)$, d.h. $*|_{\mathcal{Q}(D_N) \times B}$ und $*|_{B \times \mathcal{Q}(D_N)}$ sind für alle $B \in \mathfrak{B}$ stetig. Nach Köthe [22], II, § 40, 2.10 ist $*$ daher stetig.

Für alle $f,g,h \in \mathcal{Q}(D_N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$ gilt nach Rudin [31], 9.19 (d) $f * g = g * f$ sowie $f * (g * h) = (f * g) * h$ bei Einschränkung auf $\mathbb{R}^N$. Da jeweils beide Seiten dieser Gleichungen holomorph sind und $\mathbb{R}^N$ eine Identifikationsmenge ist, ergibt sich auch der letzte Teil der Behauptung. •

Bemerkungen. 1) Für eine komplexwertige Funktion g auf $\mathbb{R}^n$ sei $\check{g}$ definiert durch $x \to \overline{g(-x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Nach dem eben Bewiesenen ist daher für jedes $g \in \mathcal{Q}(D_N)$ $g * \check{g}$ eine schnell fallende holomorphe Funktion auf einen Umgebung von D_N.

2) Der erste Teil des Beweises zu 5.1 1) zeigt ferner, daß für jedes $f \in \mathcal{Q}(D_N)$ und jedes $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ $f * g$ holomorph auf eine Umgebung von $\mathbb{R}^N$ fortgesetzt werden kann.

5.2 Lemma. Seien $T \in \mathcal{R}(D_N)$ und $g \in \mathcal{Q}(D_N)$ beliebig. Durch

$$g * T\colon h \to \langle g * h, T\rangle,\ h \in \mathcal{Q}(D_N),$$

wird eine Fourierhyperfunktion $g * T$ definiert. Die Funktion $f_{g,T}(x) := \langle g(y - x), T_y\rangle$, $x \in \mathbb{R}^N$, ist stetig, und es gilt für alle $h \in \mathcal{Q}(D_N)$

$$\langle h, g * T\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f_{g,T}(x) \cdot h(x)\, dm_N(x)\ .$$

Beweis. 1) Die Stetigkeit von $g * T$ ergibt sich sofort aus 5.1 2).
Sei nun $g \in \mathcal{Q}(U_m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Ferner sei $\varphi_g\colon \mathbb{R}^N \to \mathcal{Q}(D_N)$ definiert durch $\varphi_g(x)\colon w \to g(w - x)$, $w \in U_m \cap \mathbb{C}^N$. Da T stetig ist und $f_{g,T}(x) = \langle \varphi_g(x), T\rangle$, $x \in \mathbb{R}^N$, gilt, folgt die Stetigkeit von $f_{g,T}$ aus der von φ_g. Um diese zu beweisen, beachte man zunächst,

daß nach Wahl von g und m $\varphi_g(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ eine holomorphe Funktion auf $U_m \cap \mathbb{C}^N$ ist. Da für jedes $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ $\sup\{|g(w)|e^{\frac{1}{m}(1-\frac{1}{p})|w|} \mid w \in \overline{U_{m+1}} \cap \mathbb{C}^N\}$ endlich ist, kann man zu jedem positiven ε ein $r > 0$ finden, so daß für alle w mit $|w| \geq r$ $|g(w)|e^{\frac{1}{m+1}|w|} < \varepsilon$ gilt. Da g auf $V_{m,r} := \overline{U_{m+1}} \cap \overline{U_{r+2}(0)}$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein positives δ, so daß für alle $z,w \in V_{m,r}$ mit $|z-w| < \delta$ $|g(z) - g(w)| < e^{-\frac{r+1}{m+1}} \cdot \varepsilon$ gilt. Für beliebige $x,y \in \mathbb{R}^N$ mit $|x-y| < \min\{\delta,1\}$ erhält man daher

$$\sup\{|\varphi_g(x)[z] - \varphi_g(y)[z]|e^{\frac{1}{m+1}|z|} \mid z \in \overline{U_{m+1}} \cap \mathbb{C}^N\} \leq$$

$$\leq \sup\{|g(z-x) - g(z-y)|e^{\frac{1}{m+1}|z|} \mid z \in \overline{U_{m+1}} \cap \mathbb{C}^N;\ |z-x| \leq r+1\} +$$

$$+ \sup\{|g(z-x)|e^{\frac{1}{m+1}|z|} \mid z \in \overline{U_{m+1}} \cap \mathbb{C}^N;\ |z-x| \geq r+1\} +$$

$$+ \sup\{|g(z-y)|e^{\frac{1}{m+1}|z|} \mid z \in \overline{U_{m+1}} \cap \mathbb{C}^N;\ |z-y| \geq r\} \leq$$

$$\leq 3\, e^{\frac{1}{m+1}(|x|+1)} \cdot \varepsilon .$$

Also ist φ_g stetig mit Werten in $\mathcal{O}B(U_{m+1})$ und damit auch als Abbildung in $\mathcal{O}(D_N)$.

2) Sind $g,h \in \mathcal{O}(D_N)$ beliebig, so folgt aus dem eben Gezeigten die Stetigkeit der Abbildung $\psi_{g,h}: \mathbb{R}^N \to \mathcal{O}(D_N)$, $\psi_{g,h}(x) = h \cdot \varphi_g(x)$. Wählt man $m \in \mathbb{N}$ so, daß $g,h \in \mathcal{O}B(U_m)$ gilt, so ist wegen

$$\sup\{|\psi_{g,h}(x)[z]|e^{\frac{1}{m+1}|z|} \mid z \in \overline{U_{m+1}} \cap \mathbb{C}^N\} \leq$$

$$\leq \sup\{|g(w)|e^{\frac{|w|}{m}} \mid w \in \overline{U_m} \cap \mathbb{C}^N\} \cdot \sup\{|h(y)|e^{\frac{|y|}{m}} \mid y \in \mathbb{R}^N\} \cdot e^{\frac{-|x|}{m(m+1)}},\ x \in \mathbb{R}^N,$$

$\psi_{g,h}$, aufgefaßt als Funktion auf $\mathbb{R}^N$ mit Werten in dem Banach-Raum $\mathcal{O}B(U_{m+1})$, absolut integrierbar. Daher gilt

$$\langle h, g * T\rangle = \langle g * h, T\rangle = \left\langle \int_{\mathbb{R}^N} g(y-x) \cdot h(x)\ dm_N(x), T_y \right\rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \langle g(y-x), T_y\rangle \cdot h(x)\ dm(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f_{g,T}(x) \cdot h(x)\ dm(x) . \quad \bullet$$

5.3 Definition. 1) Eine komplexwertige Funktion f auf $\mathbb{R}^N$ heißt *positiv semidefinit*, wenn für jede natürliche Zahl n und für beliebige Punkte $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^N$ die quadratische Form

$$z \to \sum_{k,j=1}^{n} f(x_k - x_j)\cdot \bar{z}_k \cdot z_j \quad \text{auf } \mathbb{C}^N \text{ positiv semidefinit ist.}$$

2) Eine Fourierhyperfunktion T auf D_N heißt positiv semidefinit, wenn für alle $g \in \mathcal{D}(D_N)$ $\langle g * \check{\bar{g}}, T\rangle \geq 0$ gilt.

5.4 Lemma. Sei T eine positiv semidefinite Fourierhyperfunktion. Dann ist für jedes $g \in \mathcal{D}(D_N)$ die stetige Funktion $f_{g*\check{\bar{g}},T}$ positiv semidefinit.

Beweis. Seien $g,h \in \mathcal{D}(D_N)$ beliebig gewählt. Beachtet man, daß $\check{\bar{g}} * \check{\bar{h}} = \overline{\check{g} * h}$ gilt, so folgt aus der Assoziativität und Kommutativität der Faltung

$$(5.4.1)\quad \langle h * \check{\bar{h}}, g * \check{\bar{g}} * T\rangle = \langle (g * \check{\bar{g}}) * (h * \check{\bar{h}}), T\rangle = \langle (g * h) * \overline{(\check{g} * \check{h})}, T\rangle \geq 0,$$

d.h. die Fourierhyperfunktion $T_g := g * \check{\bar{g}} * T$ ist positiv semidefinit.
Im folgenden wird in zwei Schritten gezeigt, daß durch

$$F_{g,T}\colon \varphi \to \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\cdot f_{g*\check{\bar{g}},T}(x)\, dm(x),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

eine positiv semidefinite Distribution definiert wird, d.h. für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ist $\langle \varphi * \check{\bar{\varphi}}, F_{g,T}\rangle \geq 0$ zu zeigen. Nach Gelfand;Wilenkin [9], Kap. II, § 3, Hilfssatz 1 folgt dann die Behauptung.

1) Zu jedem $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ existiert eine Folge $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(D_N)$, die auf $\mathbb{R}^N$ punktweise gegen $\varphi * \check{\bar{\varphi}}$ konvergiert.

Dazu sei wie in 2.2 $\psi_l(z) := \exp\left[-\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{N} z_j^2\right]$, $l \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}^N$.
Mit Hilfe von (2.2.1) erhält man für jedes $z = x + iy \in U_1 \cap \mathbb{C}^N$ sowie für alle $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$

$$|\psi_l(z)|\exp[(1-\tfrac{1}{p})|z|] \leq \exp[-\tfrac{1}{l}|z|^2 + |z| + \tfrac{2N}{l}] =$$

$$= \exp[-\tfrac{1}{l}(|z|^2 - l|z| + \tfrac{l^2}{4}) + \tfrac{2N}{l} + \tfrac{l^2}{4}] \leq C_l$$

unabhängig von z. Somit gilt $\psi_l \in \mathcal{Z}\mathcal{B}(U_l)$, $l \in \mathbb{N}$. Da nach Kawai [18], 3.2.4 die Fouriertransformation auf $\mathcal{Z}(D_N)$ ein topologischer Isomorphismus ist, existiert zu jedem $l \in \mathbb{N}$ ein $v_l \in \mathcal{Z}(D_N)$ mit $\hat{v}_l = \psi_l$. Wegen $v_l = (2\pi)^N \check{\psi}_l$, $l \in \mathbb{N}$, folgt ferner aus dem eben Bewiesenen mit Grothendieck [12], Intr. IV, Théorème A, daß ein $m_o \in \mathbb{N}$ existiert mit $v_l \in \mathcal{Z}\mathcal{B}(U_{m_o})$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Da jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ die Voraussetzungen von 5.1 1) mit $j = 1$ erfüllt, gilt daher für jedes $l \in \mathbb{N}$

$$h_l := v_l * \varphi * \overline{\check{v}_l * \varphi} \in \mathcal{Z}(U_{m_o+2}).$$

Man rechnet leicht nach, daß für jede L^1-Funktion u $\check{\bar{u}}(x) = \overline{\hat{u}(x)}$ fast überall auf $\mathbb{R}^N$ gilt. Zusammen mit Rudin [30], 7.2 (c) ergibt sich somit für jedes $x \in \mathbb{R}^N$

$$\hat{h}_l(x) = \hat{v}_l(x) \cdot \hat{\varphi}(x) \cdot \overline{\hat{v}_l(x) \cdot \hat{\varphi}(x)} = |\hat{v}_l(x)|^2 |\hat{\varphi}(x)|^2 =$$

$$= (\hat{\psi}_l(x))^2 |\hat{\varphi}(x)|^2 \xrightarrow{l \to \infty} |\hat{\varphi}(x)|^2$$

Außerdem ist diese Konvergenz monoton. Daher gilt für jede natürliche Zahl l und für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$

$$(5.4.2) \quad |e^{i\langle y,x\rangle} \hat{h}_l(x)| = |\hat{h}_l(x)| \leq |\hat{\varphi}(x)|^2 = \widehat{\varphi * \check{\bar{\varphi}}}(x) .$$

Nach dem Satz von Paley-Wiener (Hörmander [14], Theorem 1.7.7) gehört $\widehat{\varphi * \check{\bar{\varphi}}}$ zu $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Mit Hilfe der Umkehrformel für die Fouriertransformation und des Lebequeschen Grenzwertsatzes folgt damit für alle $y \in \mathbb{R}^N$

$$\lim_{l \to \infty} h_l(x) = \lim_{l \to \infty} (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle y,x\rangle} \cdot \hat{h}_l(x)\, dm(x) =$$

$$= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle y,x\rangle} \cdot \widehat{\varphi * \check{\bar{\varphi}}}(x)\, dm(x) = \varphi * \check{\bar{\varphi}}(y) .$$

2) $F_{g,T}$ ist positiv semidefinit.

Für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ist der Träger von $\varphi * \check{\bar{\varphi}}$ kompakt in $\mathbb{R}^N$. Die Umkehrformel für die Fouriertransformation liefert daher zusammen mit der Integration der Ungleichung (5.4.2) nach x die gleichmäßige Beschränktheit der Folge $(h_l)_{l \in \mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}^N$. Da $f_{g * \check{\bar{g}},T}$ nach 5.2 stetig ist, ist daher die Folge $(h_l \cdot f_{g * \check{\bar{g}},T})_{l \in \mathbb{N}}$ gleich-

mäßig auf jedem Kompaktum in $\mathbb{R}^N$ beschränkt. Der Lebesguesche Grenzwertsatz liefert daher zusammen mit (5.4.1)

$$\langle \varphi * \check{\bar{\varphi}}, F_{g,T} \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f_{g*\check{\bar{g}},T}(x) \cdot \varphi * \check{\bar{\varphi}}(x)\, dm(x) =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_{g*\check{\bar{g}},T}(x) \cdot h_l(x)\, dm(x) = \lim_{l\to\infty} \langle v_l * \varphi * \overline{\check{v}_l * \varphi}, T_g \rangle \geq 0 .$$

Da $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ beliebig gewählt war, ist $F_{g,T}$ eine positiv semidefinite Distribution.

5.5 Satz. Sei T wie in 5.4. Dann existiert ein positives Borel-Maß μ auf $\mathbb{R}^N$, so daß für jedes $h \in \mathcal{D}(D_N)$, das eine Darstellung der Form $h = h_o * g * \check{\bar{g}}$ mit $h_o, g \in \mathcal{D}(D_N)$ und $\hat{g}_{\mathbb{R}^N}$ ohne Nullstelle besitzt, gilt:

$$\langle h, T \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}(x)\, d\mu(x).$$

Beweis. Nach 5.4 und dem Satz von Bochner (s. [9], Kap. II, 3.2, Satz 2) existiert zu jedem $g \in \mathcal{D}(D_N)$ ein positives endliches Maß μ_g, so daß $f_{g*\check{\bar{g}},T}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,y\rangle}\, d\mu_g(y)$, $x \in \mathbb{R}^N$, gilt. Da beim Nachweis der Existenz von μ_g in [9] der Rieszsche Darstellungssatz benutzt wird, enthält die σ-Algebra $\mathfrak{M}_g$ der μ_g-meßbaren Mengen alle Borel-Mengen.
Ist nun $h = h_o * g * \check{\bar{g}}$ mit $h_o, g \in \mathcal{D}(D_N)$, so gilt

$$(5.5.1)\quad \langle h, T \rangle = \langle h_o * g * \check{\bar{g}}, T \rangle = \langle h_o, g * \check{\bar{g}} * T \rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} h_o(x) \cdot f_{g*\check{\bar{g}},T}(x)\, dm(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,y\rangle} h_o(x)\, d\mu_g(y)\, dm(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,y\rangle} h_o(x)\, dm(x)\, d\mu_g(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}_o(y)\, d\mu_g(y),$$

wobei die Vertauschung der Integrationsreihenfolge erlaubt ist, da μ_g ein endliches Maß ist und h_o schnell fällt. Für beliebige $h_o, g_1, g_2 \in \mathcal{D}(D_N)$ gilt daher

$$(5.5.2)\quad \int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}_o(x)\,|\hat{g}_1(x)|^2\,d\mu_{g_2}(x) = \langle h_o * (g_1 * \overline{g_1^{\vee}}), T_{g_2}\rangle =$$

$$= \langle (g_2 * \overline{g_2^{\vee}}) * h_o * (g_1 * \overline{g_1^{\vee}}), T\rangle = \langle h_o * (g_2 * \overline{g_2^{\vee}}), T_{g_1}\rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}_o(x)\,|\hat{g}_2(x)|^2\,d\mu_{g_1}(x)\ .$$

Auf $\mathbb{M}_{g_1} \cap \mathbb{M}_{g_2}$ definiere man nun die Mengenfunktion

$$\nu_{g_1,g_2}(E) := \int_E |\hat{g}_1(x)|^2\,d\mu_{g_2}(x) - \int_E |\hat{g}_2(x)|^2\,d\mu_{g_1}(x)\ .$$

Wüßte man bereits, daß ν_{g_1,g_2} für alle $g_1, g_2 \in \mathcal{D}(D_N)$ identisch verschwindet, so könnte man für ein fest gewähltes $g_o \in \mathcal{D}(D_N)$, dessen Fouriertransformierte auf $\mathbb{R}^N$ keine Nullstelle hat (z.B. $g_o = \psi_1$), durch

$$\mu(E) := \int_E |\hat{g}_o(x)|^{-2}\,d\mu_{g_o}(x),\quad E \in \mathbb{M}_{g_o},$$

ein Borel-Maß auf $\mathbb{R}^N$ definieren, das die geforderte Eigenschaft besitzt. Denn ist h wie oben, so folgt aus (5.5.1) unter der Annahme $\nu_{g,g_o} = 0$

$$\langle h,T\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}_o(y)\,|\hat{g}(y)|^2\,|\hat{g}(y)|^{-2}\,d\mu_g(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}(y)\,|\hat{g}_o(y)|^{-2}\,d\mu_{g_o}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}(y)\,d\mu(y)\ .$$

Also ist $\nu_{g_1,g_2} = 0$ für beliebige $g_1, g_2 \in \mathcal{D}(D_N)$ zu zeigen. Dazu sei für jedes $\varepsilon > 0$ ρ_ε eine nicht negative Glättungsfunktion, d.h. $\mathrm{Tr}(\rho_\varepsilon) = \overline{U_\varepsilon(0)}$, $\rho_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ und $\|\rho_\varepsilon\|_{L^1} = 1$. Ferner sei

$$\varphi_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\,|\hat{g}_1(y)|^2\,d\mu_{g_2}(y) - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\,|\hat{g}_2(y)|^2\,d\mu_{g_1}(y),$$

$x \in \mathbb{R}^N$ und $\varepsilon > 0$. Zur Abkürzung schreibt man hierfür auch $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\,d\nu_{g_1,g_2}(y)$. Da für $i = 1,2$ μ_{g_i} ein endliches Maß ist und mit g_i auch $|\hat{g}_i|^2$ eine schnell fallende Funktion ist, gilt für jedes $h \in \mathcal{D}(D_N)$ und jedes positive ε aufgrund des Satzes von Fubini:

$$(5.5.3)\quad \int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dm(x) = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}(x)\rho_\varepsilon(x-y)\,d\nu_{g_1,g_2}(y)\,dm(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}(x+y)\rho_\varepsilon(x)\,dm(x)\,d\nu_{g_1,g_2}(y)\ .$$

Da ρ_ε kompakten Träger hat und $\hat{h}$ auf einer Umgebung von $\mathbb{R}^N$ holomorph ist, kann man die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C},\ f(y) := \int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}(x+y)\rho_\varepsilon(x)\,dm(x),$$

zu einer holomorphen Funktion F auf $U_m \cap \mathbb{C}^N$ fortsetzen, wobei $m \in \mathbb{N}$ so gewählt sei, daß $\hat{h} \in \mathcal{O}B(U_m)$ gilt. Wegen

$$\sup\{|F(z)|e^{\frac{1}{m}|z|} \mid z \in \overline{U_m} \cap \mathbb{C}^N\} =$$

$$\leq \sup\{|\hat{h}(w)|e^{\frac{1}{m}|w|} \mid w \in \overline{U_m} \cap \mathbb{C}^N\} \cdot \|\cdot\| \cdot e^{\frac{1}{m}\|\cdot\|} \cdot \infty$$

L^1

gilt daher $F \in \mathcal{O}_c(D_N)$. Also existiert ein $g \in \mathcal{O}_c(D_N)$ mit $\check{g} = F$. Nach Wahl von φ_ε folgt dann aus (5.5.2) und (5.5.3) für jedes positive ε und für alle $h \in \mathcal{O}_c(D_N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}(x)\cdot\varphi_\varepsilon(x)\,dm(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(y)\,d\nu_{g_1,g_2}(y) = 0\ .$$

Nach 1.14 ist $\mathcal{F}(\mathcal{O}_c(D_N)) = \mathcal{O}(D_N)$ reichhaltig, so daß für jedes $\varepsilon > 0$ die stetige Funktion φ_ε identisch verschwindet. Da die σ-Algebra $\mathfrak{B}$ der Borel-Mengen in $\mathbb{M}_{g_1} \cap \mathbb{M}_{g_2}$ enthalten ist, gilt $\nu_{g_1,g_2}(E) = 0$ für alle $E \in \mathfrak{B}$, was $\nu_{g_1,g_2} = 0$ liefert. Da g_1 und g_2 beliebig gewählt waren, folgt die Behauptung. •

5.6 Lemma. Die Menge A der Funktionen $h \in \mathcal{O}_c(D_N)$, die eine Darstellung der Form $h = h_o * g * \check{\bar{g}}$ mit $h_o, g \in \mathcal{O}_c(D_N)$ und $\hat{g}|_{\mathbb{R}^N}$ ohne Nullstelle besitzen, ist folgendicht in $\mathcal{O}_c(D_N)$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{O}_c(D_N)$ beliebig gewählt. Ferner seien ψ_1 und v_1, $1 \in \mathbb{N}$, wie in 5.4. Da $\psi_1 = \hat{v}_1$ auf $\mathbb{R}^N$ nullstellenfrei ist, gilt $f_1 := f * v_1 * \overline{\check{v}_1} \in A$, $1 \in \mathbb{N}$. Wählt man $m \in \mathbb{N}$ so, daß $\hat{f} \in \mathcal{O}B(U_m)$ gilt, so erhält man für jedes $1 \in \mathbb{N}$

$$\sup\{|\hat{f}_l(z)|e^{\frac{|z|}{m}} \mid z\in\overline{U_m}\cap\mathbb{C}^N\} = \sup\{|f(z)v_l(z)\overline{v_l(\bar{z})}|e^{\frac{|z|}{m}} \mid z\in\overline{U_m}\cap\mathbb{C}^N\} \leq$$

$$\leq \sup\{|\hat{f}(z)|e^{\frac{1}{m}|z|} \mid z\in\overline{U_m}\cap\mathbb{C}^N\}\cdot\sup\{|v_l(z)||\overline{v_l(\bar{z})}| \mid z\in\overline{U_m}\cap\mathbb{C}^N\} \leq C(\hat{f})$$

unabhängig von l. Daher ist $B := \{\hat{f}_l \mid l\in\mathbb{N}\}$ in $\mathcal{Q}(D_N)$ beschränkt. Nach Wahl von v_l konvergiert die Folge $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $U_m\cap\mathbb{C}^N$ gegen $\hat{f}$. Da $\mathcal{Q}(D_N)$ nur analytische Keime enthält, ist die Topologie τ auf $\mathcal{Q}(D_N)$ der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^N$ separiert. In dem Montel-Raum $\mathcal{O}(D_N)$ stimmt daher τ mit der Topologie des induktiven Limes auf der relativ kompakten Menge B überein. Also gilt $\hat{f}_l \to \hat{f}$, $l\to\infty$, in $\mathcal{Q}(D_N)$. Da die Fouriertransformation ein topologischer Isomorphismus ist, konvergiert die Folge $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{Q}(D_N)$ gegen f. Da f beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. •

5.7 Definition. Ein Maß μ auf $\mathbb{R}^N$ heißt *von exponentieller Wachstumsordnung*, wenn für jede positive Zahl ε die Funktion $\exp\cdot(-\varepsilon\|\cdot\|)$ zu $L^1(\mathbb{R}^N,\mu)$ gehört.

5.8 Satz (Bochner-Schwartz). Eine Fourierhyperfunktion auf D_N ist genau dann positiv semidefinit, wenn sie die Fouriertransformierte eines positiven Borel-Maßes von exponentieller Wachstumsordnung ist.

Beweis. Sei zunächst μ ein positives Maß von exponentieller Wachstumsordnung. Dann wird durch

$$T(g) := \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(x)\, d\mu(x),\quad g\in\mathcal{Q}(D_N),$$

ein lineares Funktional auf $\mathcal{Q}(D_N)$ definiert. Da μ positiv ist, gilt

$$T(g*\check{\bar{g}}) = \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{g}(x)|^2\, d\mu(x) \geq 0,\quad g\in\mathcal{Q}(D_N),$$

d.h. T ist positiv semidefinit. Das Wachstumsverhalten von μ liefert schließlich zusammen mit der Stetigkeit der Inversen der Fouriertransformation die Stetigkeit von T auf jeder Stufe $\mathcal{Q}(U_m)$, $m\in\mathbb{N}$, und somit auf $\mathcal{Q}(D_N)$.

Zum Beweis der Rückrichtung beachte man, daß eine positiv semidefinite Fourierhyperfunktion T nach 5.5 und 5.6 auf einer dichten Teilmenge von $\mathcal{D}(D_N)$ als Fouriertransformierte eines positiven Borel-Maßes μ darstellbar ist. Aufgrund des ersten Teils des Beweises genügt es daher zu zeigen, daß μ von exponentieller Wachstumsordnung ist.

Dazu seien $\varepsilon > 0$ beliebig sowie $m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt. Da T nach Definition der induktiven Topologie auf $\mathcal{B}(U_m)$ stetig ist, existiert ein $\eta > 0$, so daß für alle $h \in \mathcal{D}(D_N)$ mit

$$\|h\|_m := \sup\{|h(z)| e^{\frac{1}{m}|z|} \mid z \in \overline{U_m} \cap \mathbb{C}^N\} < \eta \quad |<h,T>| < 1 \quad \text{gilt.}$$

Da der weitere Beweis sehr technisch ist, seien zunächst folgende Annahmen gemacht:

(5.8.1) Es existiert ein $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, so daß gilt:

1. Es gibt ein $B > 0$ mit $\hat{\varphi}(x) \geq B \cdot e^{-\varepsilon \|x\|}$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$.
2. Für ein $k \in \mathbb{N}$ ist $\sup\{|\hat{\varphi}(z)| e^{\frac{1}{k}|z|} \mid z \in \overline{U_k} \cap \mathbb{C}^N\}$ endlich.
3. Für alle $f \in \mathcal{D}(D_N)$ gehört $\varphi * f$ zu $\mathcal{D}(D_N)$.

(5.8.2) Seien die Funktionen ψ_l und v_l, $l \in \mathbb{N}$, wie im Beweis zu 5.4. Für die Funktionen $h_l := \varphi * v_l * \overline{\check{v}_l} * v_l * \overline{\check{v}_l}$, $l \in \mathbb{N}$, gilt dann:

1. Es existiert ein $C > 0$ mit $\|h_l\|_m \leq C \cdot \eta$ für alle $l \in \mathbb{N}$.
2. Für jedes $l \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}^N$ gilt $\hat{h}_l(x) \geq 0$.
3. Die Folge $(\hat{h}_l)_{l \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}^N$ gegen $\hat{\varphi}$.

Unter diesen zusätzlichen Voraussetzungen gilt für $l \in \mathbb{N}$ $h_l \in A$. Zusammen mit der Positivität von μ folgt daher

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}_l(x)\, d\mu(x) = <h_l,T> = |<h_l,T>| \leq C .$$

Mit Hilfe des Fatou-Lemmas erhält man deshalb

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\|x\|}\, d\mu(x) \le \frac{1}{B} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\varphi}(x)\, d\mu(x) \le$$

$$< \frac{1}{B} \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}_l(x)\, d\mu(x) \le \frac{C}{B} < \infty ,$$

was die Behauptung impliziert.

Beweis von (5.8.1). Wählt man die Funktion t wie am Anfang von § 2 beschrieben, so gilt $g := \exp(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}\, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nach Hörmander [14], Corollary 1.7.1 existiert ein $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ mit $\hat{G} = g$. Ferner wähle man $h \in \mathcal{D}(D_N)$, $h \neq 0$, und $n_o \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_o} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{N}}$ und $\widehat{h * \check{h}} \in \mathcal{D}B(U_{n_o})$. Dann setze man $\varphi := G \cdot h * \check{h}$. Wegen $\mathcal{D}(D_N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ und nach Wahl von G gehört φ zu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ferner gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ nach [14], Theorem 1.7.2 und Konstruktion von t

$$\hat{\varphi}(x) = (2\pi)^{-N}\, \hat{G} * |\hat{h}|^2(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} g(x-y)\, |\hat{h}(y)|^2\, dm(y) =$$

$$= (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}\, t(x-y)}\, |\hat{h}(y)|^2\, dm(y) \ge$$

$$\ge \frac{1}{R_o}\, (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\varepsilon\|x-y\|}\, |\hat{h}(y)|^2\, dm(y) \ge$$

$$\ge \frac{1}{R_o}\, (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\varepsilon\|y\|} \cdot |\hat{h}(y)|^2\, dm(y) \cdot e^{-\varepsilon\|x\|} =: B \cdot e^{-\varepsilon\|x\|} .$$

Da $h \neq 0$ gilt, ist B positiv, was 1. beweist.

Nach Wahl von h und wegen $\hat{\varphi}(x) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} g(y)\, \widehat{h * \check{h}}(x-y)\, dm(y)$ kann man φ aufgrund der Bemerkung im Anschluß an 5.1 holomorph auf $U_k \cap \mathbb{C}^N$, $k \ge n_o$, fortsetzen. Außerdem erhält man die Abschätzung

$$\sup\{|\hat{\varphi}(z)|e^{\frac{1}{k}|z|} \mid z \in \overline{U_k} \cap \mathbb{C}^N\} \le$$

$$\le \sup\{\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|\, |\widehat{h * \check{h}}(z-y)|\, e^{\frac{1}{k}(\|z-y\|+\|y\|)}\, dm(y) \mid z \in \overline{U_k} \cap \mathbb{C}^N\} \le$$

$$\le \frac{1}{R_1} \|\widehat{h * \check{h}}\|_k \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{N}} - \frac{1}{k}\right)\|y\|}\, dm(y) < \infty ,$$

d.h. es gilt 2.

Sei nun $f \in \mathcal{Q}(D_N)$ beliebig. Wählt man $j \in \mathbb{N}$ so, daß die Funktionen f und $h * \check{h}$ zu $\mathcal{Q}B(U_j)$ gehören, so ist $\varphi * f$ holomorph auf $U_j \cap \mathbb{C}^N$ fortsetzbar, und es gilt

$$\|\varphi * f\|_{j+1} \leq$$

$$\leq \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |G(x) \cdot h * \check{h}(x)| e^{\frac{1}{j}(\|x\| + |z-x|)} |f(z-x)| dm(x) \quad z \in \overline{U_{j+1}} \cap \mathbb{C}^N \right\} \leq$$

$$\leq \|h * \check{h}\|_j \cdot \|f\|_j \cdot \|G\|_{L^1} < \infty ,$$

was schließlich auch die Gültigkeit der dritten Behauptung zeigt.

Beweis von (5.8.2). Ist n_o wie eben, so gilt wegen (2.2.1) für alle $k \geq n_o$

$$\|\hat{h}_l\|_k = \sup\{ |\hat{\varphi}(z)| |\hat{v}_l(z)|^2 \overline{|\hat{v}_l(\bar{z})|^2} \, e^{\frac{1}{k}|z|} \cdot z \in \overline{U_k} \cap \mathbb{C}^N \} \leq$$

$$\leq \|\hat{\varphi}\|_k \sup\{ |\psi_l(z)|^2 |\psi_l(\bar{z})|^2 \mid z \in \overline{U_k} \cap \mathbb{C}^N \} \leq e^{8N} \|\hat{\varphi}\|_k < \infty$$

unabhängig von $l \in \mathbb{N}$. Also ist die Menge $\{\hat{h}_l \mid l \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{Q}B(U_k)$ beschränkt. Da die Fouriertransformation auf $\mathcal{Q}(D_N)$ topologisch ist, folgt aus der Regularität des (DFS)-Raumes $\mathcal{Q}(D_N)$, daß auch die Menge $\{h_l \mid l \in \mathbb{N}\}$ beschränkt in einer Stufe enthalten ist. Wählt man daher $m \in \mathbb{N}$ groß genug, so erhält man die erste Behauptung. Die restlichen Aussagen folgen dann nach Wahl der Funktionen v_l, $l \in \mathbb{N}$, aus (5.8.1) 1.

Damit ist der Satz von Bochner-Schwartz für Fourierhyperfunktionen vollständig bewiesen. •

Zusammenfassung

1970 veröffentlichte Kawai eine Verallgemeinerung der von Sato entwickelten Theorie der Hyperfunktionen. Bezeichnet man mit D_N die Radialkompaktifizierung des $\mathbb{R}^N$, so betrachtete er auf $D_N \times i\mathbb{R}^N$ die Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Keime, die für jedes positive ε langsamer als $\exp\circ(\varepsilon|\cdot|)$ wachsen. Kawai definierte die Garbe $\mathcal{R}$ der Fourierhyperfunktionen auf D_N als Einschränkung auf D_N der N-ten abgeleiteten Garbe von $\mathcal{O}$ mit Träger in D_N. Dabei ist die Namensgebung gerechtfertigt, weil auf den globalen Schnitten in $\mathcal{R}$ eine Fouriertransformation erklärt werden kann und weil sich jede Hyperfunktion über einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ zu einer Fourierhyperfunktion fortsetzen läßt. Die zum Nachweis wichtiger Eigenschaften dieser Garbe benutzte Kohomologiemaschinerie und L^2-Technik gestatten es außerdem, Vektorwerte in einem separablen Hilbert-Raum zuzulassen.

Will man, wie es in dieser Arbeit geschieht, die Garbe $\mathcal{R}^E$ der Fourierhyperfunktionen auf D_N mit Werten in einem Fréchet-Raum E einführen, so muß man andere Beweistechniken mit ins Spiel bringen. Der wesentliche Schritt besteht darin, daß man für die Garbe $\mathcal{O}$ eine Art Dolbeault-Auflösung durch Garben von Keimen langsam wachsender C^∞-Differentialformen vom Bigrad $(0,q)$, $q \in \mathbb{N}_0$, angibt. Ist f eine C^∞-$(0,q+1)$-Form, deren Koeffizienten zusammen mit allen Ableitungen langsamer als die Funktionen $\exp\circ(\varepsilon|\cdot|)$, $\varepsilon > 0$, wachsen, und gilt $\bar\partial f = 0$, so kann man mit Hilfe eines abstrakten Mittag-Leffler-Schlusses eine Lösung g der Gleichung $\bar\partial g = f$ angeben, die einer Reihe von L^2-Abschätzungen genügt. Mit dem Sobolev-Lemma zeigt man dann, daß g bereits eine langsam wachsende C^∞-Differential-$(0,q)$-Form ist. Wichtige Resultate aus dem skalarwertigen Fall können daher äquivalent mit Hilfe von kurzen, topologisch exakten Sequenzen nuklearer Fréchet-Räume formuliert werden. Da bei Tensorierung mit E die Exaktheit erhalten bleibt, gelingt es so, die entsprechenden Ergebnisse für die Garbe $\mathcal{R}^E$ zu beweisen. Hierzu zählen insbesondere die Surjektivität des $\bar\partial$-Operators auf den E-wertigen, langsam wachsenden C^∞-$(0,N-1)$-Formen sowie die Beschreibung der Schnitte in $\mathcal{R}^E$ mit Träger in dem Kompaktum K durch den Raum $\mathcal{O}'_b(K) \hat\otimes_\pi E$, wobei $\mathcal{O}(K)$ den Raum der Keime holomorpher Funktionen, die auf einer Umge-

bung von K für ein positives η schneller als $\exp\circ(-\eta|\cdot|)$ fallen, bezeichnet. Beide Resultate werden wesentlich benutzt, um zu zeigen, daß das Garbendatum $\{H^N_U(V,\mathcal{O}^E), \rho_{U,U'}\}_{U\subset D_N}$ offen, $U'\subset U$ offen und $V\subset D_N\times i\mathbb{R}^N$ offen mit $U=V\cap D_N$, die welke Garbe $\mathcal{H}^N_{D_N}(\mathcal{O}^E)$ auf $D_N\times i\mathbb{R}^N$ mit Träger in D_N ist. Daher ist auch $\mathcal{R}^E$ als Einschränkung von $\mathcal{H}^N_{D_N}(\mathcal{O}^E)$ auf D_N welk. Außerdem liefert ein Satz von Leray eine Darstellung der E-wertigen Fourierhyperfunktionen auf offenen Teilmengen von D_N durch Randwerte langsam wachsender, E-wertiger holomorpher Funktionen. Die Beschreibung der Schnitte mit kompaktem Träger ermöglicht ferner die Definition einer Fouriertransformation auf den globalen Schnitten in $\mathcal{R}^E$.

Der Schwartzsche Satz vom Kern ist nur für die globalen Schnitte gültig, d.h. der Raum der skalarwertigen Fourierhyperfunktionen auf D_N ist isomorph zum N-fachen Tensorprodukt des Raumes der Fourierhyperfunktionen einer Variablen. Andererseits kann dieser als Raum der Fourierhyperfunktionen auf D_1 mit Werten in den Schnitten in $\mathcal{R}$ über D_{N-1} beschrieben werden.

Den Abschluß dieser Arbeit bildet die Charakterisierung der positiv semidefiniten Fourierhyperfunktionen durch die Fouriertransformierten positiver Borel-Maße μ auf $\mathbb{R}^N$, für die die Funktionen $\exp\circ(-\varepsilon|\cdot|)$ für jedes positive ε bez. μ integrierbar sind. Wesentliches Hilfsmittel beim Beweis dieses Satzes vom Bochner-Schwartz-Typ ist die Tatsache, daß die Fouriertransformation auf $\mathcal{D}(D_N)$ ein topologischer Isomorphismus ist. Dies ermöglicht es, den Beweis ähnlich wie im Fall der Distributionen oder der Ultradistributionen zu führen.

Literaturverzeichnis

[1] Baernstein, A. II: Representation of Holomorphic Functions by Boundary Integrals; Trans. Amer. Math. Soc. 160, 27 - 37 (1971)

[2] Bierstedt, K.-D.; Gramsch, B.; Meise, R.: Lokalkonvexe Garben und gewichtete induktive Limites $\mathcal{F}$-morpher Funktionen, Bonner Math. Schriften 81, 59 - 72 (1975)

[3] Bierstedt, K.-D.; Gramsch, B.; Meise, R.: Approximationseigenschaft, Lifting und Kohomologie bei lokalkonvexen Produktgarben, manuscripta math. 19, 319 - 364 (1976)

[4] Bochner, S.: Vorlesungen über Fouriersche Integrale, New York, 1948

[5] Constantinescu, F.; Weingärtner, O.: Der Satz von Bochner-Schwartz für Ultradistributionen, Math. Z. 147, 175 - 180 (1976)

[6] Floret, K.; Wloka, J.: Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume, Lecture Notes in Mathematics 56, Berlin, 1968

[7] Friedman, A.: Solvability of the First Cousin Problem and Vanishing of Higher Cohomology Groups for Domains which are not Domains of Holomorphy II, Bull. Amer. Math. Soc. 72, 505 - 507 (1966)

[8] Gel'fand, I. M.; Shilov, G. E.: Generalized Functions Vol. 2, New York, 1968

[9] Gelfand, I. M.; Wilenkin, N. J.: Verallgemeinerte Funktionen IV, Berlin, 1964

[10] Gramsch, B.: Ein Schwach-Stark-Prinzip in der Dualitätstheorie lokalkonvexer Räume als Fortsetzungsprinzip, Math. Z. 156, 217 - 230 (1977)

[11] Grothendieck, A.: Opérations algébriques sur les distributions à valeurs vectorielles - Théorème de Künneth, Sém. Schwartz 1953/54, exp. 24 (1954)

[12] Grothendieck, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. Vol. 16, Providence (R.I.), ^{4}1966

[13] Hörmander, L.: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Amsterdam, 1973

[14] Hörmander, L.: Linear Partial Differential Operators, Grundlehren Bd. 116, Berlin, ^{3}1969

[15] Ion, P. D. F.; Kawai, T.: Vector Valued Hyperfunctions, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 11, 1 - 19 (1975)

[16] Ito, Y.; Nagamachi, S.: On the Theory of Vector Valued Fourier Hyperfunctions, J. Math. Tokushima Univ. 9, 1 - 33 (1975)

[17] Junker, K.: Vektorwertige Fourierhyperfunktionen, Diplomarbeit, Düsseldorf 1978

[18] Kawai, T.: On the Theory of Fourier Hyperfunctions and its Applications to Partial Differential Equations with Constant Coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I A 17,

467 - 517 ,(1970)

[19] Komatsu, H.: Projective and Injective Limits of Weakly Compact Sequences of Locally Convex Spaces, J. Math. Soc. Japan 19, 366 - 383 (1967)

[20] Komatsu, H.: Relative Cohomology of Sheaves of Solutions of Differential Equations, in: Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, 192 - 261, Lecture Notes in Mathematics 287, Berlin, 1973

[21] Köthe, G.: Dualität in der Funktionentheorie, J. reine angew. Math. 191, 30 - 49 (1953)

[22] Köthe, G.: Topological Vector Spaces I, Grundlehren Bd. 159, Berlin, 1969; Bd. II wird erscheinen.

[23] Kultze, R.: Garbentheorie, Stuttgart, 1970

[24] Malgrange, B.: Faisceaux sur des variétés analytiques réelles, Bull. Soc. Math. France 85, 231 - 237 (1957)

[25] Martineau, A.: Les hyperfonctions de M. Sato, Sém. Bourbaki 13, 1960/61, exp. 214

[26] Meise, R.: Räume holomorpher Vektorfunktionen mit Wachstumsbedingungen und topologische Tensorprodukte, Math. Ann. 119, 293 - 312 (1972)

[27] Mugibayashi, N.; Nagamachi, S.: Hyperfunction Quantum Field Theory I, II, Commun. math. Phys. 46, 119 - 134 (1976); 49, 257 - 275 (1976)

[28] Petzsche, H.-J.: Die Nuklearität der Ultradistributionsräume und der Satz vom Kern I, manuscripta math. 24, 133 - 171 (1978)

[29] Pietsch, A.: Nuclear Locally Convex Spaces, Ergebnisse der Mathematik Bd. 66, Berlin, 1972

[30] Rudin, W.: Functional Analysis, New York, 1973

[31] Rudin, W.: Real and Complex Analysis, New York, ^{2}1974

[32] Sato, M.: Theory of Hyperfunctions I, II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, 8, 139 - 193, 387 - 436 (1959/60)

[33] Schaefer, H. H.: Topological Vector Spaces, Graduate Texts in Mathematics 3, New York, ^{3}1971

[34] Schapira, P.: Théorie des hyperfonctions, Lecture Notes in Mathematics 126, Berlin, 1970

[35] Schubert, H.: Topologie, Stuttgart, ^{4}1975

[36] Schwartz, L.: Théorie des distributions à valeurs vectorielle, Ann. Inst. Fourier 7, 1 - 142 (1957)

[37] Serre, P.: Une théorème de dualité, Comm. Math. Helv. 29, 9 - 26 (1955)

[38] Swartz, G.: The Nuclearity of $K\{M_p\}$-Spaces, Math. Nachr. 44, 193 - 197 (1970)

[39] Treves, F.: Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Pure and Applied Mathematics 25, New York, 1967

[40] Warner, F.: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie

Groups, Glenview (Ill.), 1971

[41] Wloka, J.: Reproduzierende Kerne und nukleare Räume II, Math. Annalen 172, 79 - 93 (1967)

[42] Ito, Y.: Fourier Analytic Linear Mappings and Vector Valued Fourier Hyperfunctions (Manuskript)

[43] Nagamachi, S.: The Theory of Vector Valued Fourier Hyperfunctions of Mixed Type (Manuskript)

Herrn Prof. Dr. R. Meise, der mir einen bedeutenden Teil meiner mathematischen Ausbildung vermittelt hat, danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für seine sehr intensive Betreuung während der Anfertigung.

Lebenslauf

Ich wurde am 15. Juni 1954 in Düsseldorf geboren. Meine Eltern sind der kaufmännische Angestellte Theodor Junker und die Hausfrau Helene Junker, geb. Geerling. Ich wuchs zunächst in Düsseldorf auf und wurde im April 1961 in die Kath. Volksschule Pempelfort eingeschult. Vom Herbst 1963 bis zum Frühjahr 1965 besuchte ich dann die Kath. Knabenschule Neuss-Weißenberg, wechselte anschließend auf das Staatl. Quirinus-Gymnasium in Neuss über und legte dort im Mai 1973 das Abitur ab. Nachdem ich sechs Wochen nach Einberufung zur Bundeswehr aus gesundheitlichen Gründen vorzeitig entlassen wurde, nahm ich im Wintersemester 1973/74 an der Universität Düsseldorf das Studium der Physik auf. Nach dem vierten Studiensemester legte ich die Diplom-Vorprüfungen in Physik und Mathematik ab. Daraufhin wechselte ich auf den Studiengang Mathematik mit Wahlfach Theoretische Physik über und schloß diesen im April 1978 mit der Diplomprüfung ab. Seitdem bin ich als Verwalter der Stelle eines Wissenschaftlichen Assistenten am Mathematischen Institut der Universität Düsseldorf tätig.